2021 考研数学真题试卷

数学（三）

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求，把所选选项前的字母填在答题卡指定位置上）

1．当 $x \to 0$ 时，$\int_0^{x^2}\left(e^{t^3}-1\right)dt$ 是 x^7 的（　　）无穷小.

（A）低阶　　（B）等价　　（C）高阶　　（D）同阶但非等价

2．函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处（　　）

（A）连续且取极大值　　（B）连续且取极小值

（C）可导且导数为 0　　（D）可导且导数不为 0

3．设函数 $f\left(x\right)=ax-b\ln x$（$a>0$）有两个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是（　　）.

（A）$\left(e,+\infty\right)$　　（B）$\left(0,e\right)$　　（C）$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$　　（D）$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

4．设函数 $f\left(x,y\right)$ 可微，且 $f\left(x+1,e^x\right)=x\left(x+1\right)^2$，$f\left(x,x^2\right)=2x^2\ln x$，则 $df\left(1,1\right)=$（　　）.

（A）$dx+dy$　　（B）$dx-dy$　　（C）dy　　（D）$-dy$

5．二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1+x_2\right)^2+\left(x_2+x_3\right)^2-\left(x_3-x_1\right)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为（　　）

（A）2，0　　（B）1，1　　（C）2，1　　（D）1，2

6．设矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$ 为 4 阶正交矩阵，若矩阵 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 表示任意常数，则线性方程组 $Bx=\beta$ 的通解 $x=$（　　）.

（A）$\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+k\alpha_1$　　（B）$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+k\alpha_2$

（C）$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+k\alpha_3$　　（D）$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+k\alpha_4$

7．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -5\end{pmatrix}$，若下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q，使 PAQ 为对角矩阵，则 P，Q 可以分别取（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

8．设A，B为随机事件，且$0<P(B)<1$，下列命题中不成立的是（　　）

（A）若$P(A|B)=P(A)$，则$P(A|\bar{B})=P(A)$

（B）若$P(A|B)>P(A)$，则$P(\bar{A}|\bar{B})>P(\bar{A})$

（C）若$P(A|B)>P(A|\bar{B})$，则$P(A|B)>P(A)$

（D）若$P(A|A\cup B)>P(\bar{A}|A\cup B)$，则$P(A)>P(B)$

9．设(X_1,Y_1)，(X_2,Y_2)，$\cdots$，(X_n,Y_n)为来自总体$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$的简单随机样本，

令$\theta=\mu_1-\mu_2$，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$\hat{\theta}=\bar{X}-\bar{Y}$，则（　　）

（A）$E(\hat{\theta})=\theta$，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（B）$E(\hat{\theta})\neq\theta$，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（C）$E(\hat{\theta})=\theta$，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

（D）$E(\hat{\theta})\neq\theta$，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

10．设总体X的概率分布为$P\{X=1\}=\frac{1-\theta}{2}$，$P\{X=2\}=P\{X=3\}=\frac{1+\theta}{4}$，利用来自总体的样本值 1，3，2，2，1，3，1，2，可得θ的最大似然估计值为（　　）．

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{3}{8}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{5}{2}$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．请将答案写在答题纸指定位置上．）

11．若 $y=\cos e^{-\sqrt{x}}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$______.

12．$\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx=$______.

13．设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{x}\sin\pi x$（$0\le x\le 1$）与 x 轴围成，则 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为______.

14．差分方程 $\Delta y_t=t$ 的通解为______.

15．多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为______.

16．甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球．令 X，Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X 与 Y 的相关系数______.

三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分．请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17．（本题满分 10 分）

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(a\arctan\dfrac{1}{x}+\left(1+|x|\right)^{\frac{1}{x}}\right)$ 存在，求 a 的值.

18．（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

19．（本题满分 12 分）

设有界区域 D 是 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分，计算二重积分 $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}\left(x^2-y^2\right)dxdy$.

20．（本题满分 12 分）

设 n 为正整数，$y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的解.

（1）求 $y_n(x)$；

（2）求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

21．（本题满分 12 分）

已知$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & a & b\end{pmatrix}$仅有两个不同的特征值，若$A$相似于对角矩阵，求$a$，$b$的值，并求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵.

22.（本题满分 12 分）

在区间$\left(0,2\right)$上随机取一点，将该区间分成两段，较短的一段长度记为X，较长的一段长度记为Y，令$Z=\dfrac{Y}{X}$.

（1）求X的概率密度；

（2）求Z的概率密度；

（3）求$E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.