2020年全国硕士研究生招生考试数学三试题

一、选择题：1~8题，每小题4分，共32分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

（1）设$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$，则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$（　　）

A．$b\sin a$　　B．$b\cos a$　　C．$b\sin f(a)$　　D．$b\cos f(a)$

（2）函数$f(x)=\dfrac{\frac{1}{e^{x-1}}\ln|1+x|}{\left(e^{x}-1\right)(x-2)}$的第二类间断点的个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

（3）设奇函数$f\left(x\right)$ 在$\left(-\infty,+\infty\right)$上具有连续导数，则（　　）

A．$\int_0^x\left[\cos f(t)+f'(t)\right]dt$是奇函数　　B．$\int_0^x\left[\cos f(t)+f'(t)\right]dt$是偶函数

C．$\int_0^x\left[\cos f'(t)+f(t)\right]dt$是奇函数　　D．$\int_0^x\left[\cos f'(t)+f(t)\right]dt$是偶函数

（4）设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$的收敛区间为$\left(-2,6\right)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$的收敛区间为（　　）

A．$(-2,6)$　　B．$(-3,1)$　　C．$(-5,3)$　　D．$(-17,15)$

（5）设4阶矩阵$A=\left(a_{ij}\right)$不可逆，a_{12}的代数余子式$A_{12}\neq 0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为矩阵$A$的列向量组，$A^*$为$A$的伴随矩阵，则方程组$A^*x=0$的通解为（　　）

A．$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意数

B．$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意数

C．$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意数

D．$x=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意数

（6）设A为3阶矩阵，α_1,α_2为A的属于特征值1的线性无关的特征向量，α_3为A的属于特征值-1的特征向量，则满足$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$的可逆矩阵$P$可为（　　）

A．$(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2,-\alpha_3)$　　　　B．$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,-\alpha_3)$

C．$(\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_2)$　　　　D．$(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)$

（7）设A,B,C为三个随机事件，且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$，则$A,B,C$中恰有一个事件发生的概率为（　　）

A．$\dfrac{3}{4}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{5}{12}$

（8）设随机变量(X,Y)服从二维正态分布$N\left(0,0;1,4;-\dfrac{1}{2}\right)$，则下列随机变量中服从标准正态分布且与$X$独立的是（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$

C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$　　　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

二、填空题：9~14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在横线上．

（9）设$z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则$dz\big|_{(0,\pi)}=$________．

（10）曲线$x+y+e^{2xy}=0$在$(0,-1)$处的切线方程为________．

（11）设某厂家某产品的产量为Q，成本$C(Q)=100+13Q$，设产品的单价为P，需求量$q(P)=\dfrac{800}{P+3}-2$，则该厂家获得最大利润时的产量为________．

（12）设平面区域$D=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{x}{2}\le y\le\dfrac{1}{1+x^2},0\le x\le1\right\}$，则$D$绕$y$轴旋转所成的旋转体的体积为________．

（13）行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$ ________.

（14）设随机变量X的概率分布为$P\left\{X=k\right\}=\dfrac{1}{2^k}$，$k=1,2,3,\cdots$，$Y$表示$X$被3除的余数，则$EY=$________.

三、解答题：15~23小题，共94分．解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

（15）（本题满分10分）

已知a,b为常数，若$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e$与$\dfrac{b}{n^a}$在$n\to\infty$时是等价无穷小，求$a,b$.

（16）（本题满分10分）

求函数$f(x,y)=x^3+8y^3-xy$的极值.

（17）（本题满分10分）

设函数$y=f(x)$满足$y''+2y'+5y=0$且$f(0)=1$，$f'(0)=-1$.

（Ⅰ）求$f(x)$的表达式.

（Ⅱ）设$a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)dx$，求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

（18）（本题满分10分）

设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,y\ge 0\right\}$，连续函数 $f(x,y)$ 满足

$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，求 $\iint\limits_D xf(x,y)dxdy$.

（19）（本题满分10分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，

$M=\max\limits_{[0,2]}\left|f(x)\right|$，证明

（Ⅰ）$\exists\xi\in(0,2)$ 使得 $\left|f'(\xi)\right|\ge M$；

（Ⅱ）若对任意的 $x\in(0,2)$，$\left|f'(x)\right|\le M$，则 $M=0$.

（20）（本题满分10分）

设二次型 $f\left(x_1,x_2\right)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型

$g\left(y_1,y_2\right)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\ge b$.

（Ⅰ）求 a,b 的值；

（Ⅱ）求正交矩阵 Q .

（21）（本题满分10分）

设A为2阶矩阵，$P=(\alpha, A\alpha)$，其中α是非零向量且不是A的特征向量.

（Ⅰ）证明P为可逆矩阵；

（Ⅱ）若$A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求$P^{-1}AP$，并判断$A$是否相似于对角矩阵.

（22）（本题满分10分）

设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\left\{(x,y)\middle|0<y<\sqrt{1-x^2}\right\}$上服从均匀分布，令

$$Z_1=\begin{cases}1, X-Y>0\\0, X-Y\le 0\end{cases},\quad Z_2=\begin{cases}1, X+Y>0\\0, X+Y\le 0\end{cases}$$

（Ⅰ）求二维随机变量(Z_1,Z_2)的概率分布；

（Ⅱ）求Z_1与Z_2的相关系数.

（23）（本题满分10分）

设某种元件的使用寿命T的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} & ,t\ge 0\\0, & 其他.\end{cases}$$

其中θ，m为参数且大于零.

（Ⅰ）求概率P T   t 与P T   s   t T   s ，其中s   0，t   0;

（Ⅱ）任取n个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为$t_1,t_2,\cdots,t_n$，若m已知，求θ的最大似然估计值$\hat{\theta}$.