

(7) 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是 ()

- (A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (B) $P(AB) = P(A)P(B)$
(C) $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$ (D) $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从于正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$ ()

- (A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关 (B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关
(C) 与 μ, σ^2 都有关 (D) 与 μ, σ^2 都无关

二、填空题: 9~14小题, 每小题4分, 共24分.

(9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}.$

(10) 曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \right)$ 的拐点坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(11) 已知函数 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^4} dt$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 以 P_A, P_B 分别表示 A, B 两个商品的价格, 设商品 A 的需求函数 $Q_A = 500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2$, 则当 $P_A = 10, P_B = 20$ 时, 商品 A 的需求量对自身价格弹性 $\eta_{AA} (\eta_{AA} > 0)$ 为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$. 若线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多

解, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, $F(x)$ 为 X 的

分布函数, EX 为 X 的数学期望, 则 $P\{F(X) > EX - 1\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题：15~23小题，共94分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分10分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0 \\ xe^x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$ ，求 $f'(x)$ ，并求 $f(x)$ 的极值。

(16) (本题满分10分)

设函数 $f(u, v)$ 具有2阶连续偏导数，函数 $g(x, y) = xy - f(x + y, x - y)$ ，求

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

(17) (本题满分10分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1) = \sqrt{e}$ 的特解。

(1) 求 $y(x)$ ；

(2) 设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$ ，求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积。

(18) (本题满分10分)

求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积。

(19) (本题满分10分)

$$\text{设 } a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n=0,1,2)$$

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n=2,3,L)$

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

(20) (本题满分11分)

已知向量组

$$\text{I: } \alpha_1 = (1,1,4)^T, \alpha_2 = (1,0,4)^T, \alpha_3 = (1,2,a^2+3)^T$$

$$\text{II: } \beta_1 = (1,1,a+3)^T, \beta_2 = (0,2,1-a)^T, \beta_3 = (1,3,a^2+3)^T$$

若向量组I与向量组II等价, 求 a 的取值, 并将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

(21) (本题满分11分)

$$\text{已知矩阵 } A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ 与 } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \text{ 相似.}$$

(1) 求 x, y ;

(2) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

(22) (本题满分11分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为1的指数分布. Y 的概率分布为 $P\{Y = -1\} = p$, $P\{Y = 1\} = 1-p (0 < p < 1)$, 令 $Z = XY$

- (1) 求 Z 的概率密度;
- (2) p 为何值时, X 与 Y 不相关;
- (3) X 与 Y 是否相互独立.

(23) (本题满分11分)

$$\text{设总体 } X \text{ 的概率密度为 } f(x; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu. \\ 0, & x < \mu. \end{cases}$$

其中 μ 是已知参数, $\sigma > 0$ 是未知参数, A 是常数, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

- (1) 求 A ;
- (2) 求 σ^2 的最大似然估计量.