2018年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的．

（1）下列函数中，在$x=0$处不可导的是（　　）

（A）$f(x)=|x|\sin|x|$　　（B）$f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

（C）$f(x)=\cos|x|$　　（D）$f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

（2）设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$\int_0^1 f(x)dx=0$，则（　　）

（A）当$f'(x)<0$时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　（B）当$f''(x)<0$时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

（C）当$f'(x)>0$时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　（D）当$f''(x)>0$时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

（3）设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$，则（　　）

（A）$M>N>K$　　（B）$M>K>N$

（C）$K>M>N$　　（D）$K>N>M$

（4）设某产品的成本函数$C(Q)$可导，其中Q为产量．若产量为Q时平均成本最小，则（　　）

（A）$C'(Q_0)=0$　　（B）$C'(Q_0)=C(Q_0)$

（C）$C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$　　（D）$Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$

（5）下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

（6）设A、B为n阶矩阵，记$r(X)$为矩阵X的秩，(X,Y)表示分块矩阵，则（　　）

（A）$r(A,AB)=r(A)$　　（B）$r(A,BA)=r(A)$

（C）$r(A,B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　（D）$r(A,B)=r(A^TB^T)$

（7）设随机变量X的概率密度$f(x)$满足$f(1+x)=f(1-x)$，且$\int_0^2 f(x)dx=0.6$，则$P\{X<0\}=$（　　）

（A）0.2　　（B）0.3　　（C）0.4　　（D）0.5

（8）设$X_1,X_2,\ldots,X_n(n\ge 2)$为来自总体$N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$的简单随机样本，令

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$，$S^*=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$，则（　　）

（A）$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n)$　　（B）$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$

（C）$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n)$　　（D）$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n-1)$

二、填空题：9~14小题，每小题4分，共24分.

（9）曲线$y=x^2+2\ln x$在其拐点处的切线方程是________.

（10）$\int e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}dx=$________.

（11）差分方程$\Delta^2 y_x-y_x=5$的通解是________.

（12）设函数$f(x)$满足$f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$，且$f(0)=2$，则$f(1)=$________.

（13）设A为3阶矩阵，a_1,a_2,a_3是线性无关的向量组，若$Aa_1=a_1+a_2$，$Aa_2=a_2+a_3$，$Aa_3=a_1+a_3$，则$|A|=$________.

（14）随机事件A,B,C相互独立，且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$，则

$P(AC \quad A\cup B)=$________.

三、解答题：15~23小题，共94分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分10分）

已知实数a,b满足$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$，求$a,b$．

（16）（本题满分10分）

设平面区域D由曲线$y=\sqrt{3\left(1-x^2\right)}$与直线$y=\sqrt{3}x$及$y$轴围成．计算二重积分$\iint\limits_D x^2dxdy$．

（17）（本题满分10分）

将长为$2m$的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形．三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值．

（18）（本题满分10分）

已知$\cos 2x-\dfrac{1}{(1+x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\,(-1<x<1)$，求$a_n$．

（19）（本题满分10分）

设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0,x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$，证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

（20）（本题满分11分）

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中$a$是参数.

（I）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；

（II）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的规范形.

（21）（本题满分11分）

已知a是常数，且矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵$B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

（I）求a；

（II）求满足$AP=B$的可逆矩阵P.

（22）（本题满分11分）

设随机变量X与Y相互独立，X的概率分布为

$P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$，$Y$服从参数为$\lambda$的泊松分布．令$Z=XY$．

（I）求$Cov(X,Z)$；

（II）求Z的概率分布．

（23）（本题满分11分）

设总体X的概率密度为

$$f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}，\quad -\infty<x<+\infty,$$

其中$\sigma\in(0,+\infty)$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本

记σ的最大似然估计量为$\hat{\sigma}$

（I）求$\hat{\sigma}$；

（II）求$E\hat{\sigma}$和$D\left(\hat{\sigma}\right)$．