2017年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的．

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）

（A）$ab=\dfrac{1}{2}$　　（B）$ab=-\dfrac{1}{2}$

（C）$ab=0$　　（D）$ab=2$

（2）二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是（　　）

（A）（0，0）　　（B）（0，3）

（C）（3，0）　　（D）（1，1）

（3）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则（　　）

（A）$f(1)>f(-1)$　　（B）$f(1)<f(-1)$

（C）$|f(1)|>|f(-1)|$　　（D）$|f(1)|<|f(-1)|$

（4）若续数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛，则 $k=$（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）-1　　（D）-2

（5）设 α 为 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则（　　）

（A）$E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　（B）$E+\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆

（C）$E+2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　（D）$E-2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆

（6）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则（　　）

（A）A 与 C 相似，B 与 C 相似

（B）A 与 C 相似，B 与 C 不相似

（C）A 与 C 不相似，B 与 C 相似

（D）A 与 C 不相似，B 与 C 不相似

（7）设A，B，C为三个随机事件，且A与C相互独立，B与C相互独立，则$A\cup B$与C相互独立的充分必要条件是（　　）

（A）A与B相互独立　　　　（B）A与B互不相容

（C）AB与C相互独立　　　　（D）AB与C互不相容

（8）设$X_1,X_2,\ldots X_n(n\geq 2)$为来自总体$N(\mu,1)$的简单随机样本，记$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

则下列结论正确的是（　　）

（A）$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2$服从$x^2$分布　　　　（B）$2\left(x_n-x_1\right)^2$服从$x^2$分布

（C）$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{X}\right)^2$服从$x^2$分布　　　　（D）$n(\bar{X}-\mu)^2$服从$x^2$分布

二、填空题：9~14小题，每小题4分，共24分.

（9）$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2}\right)dx=$________.

（10）差分方程$y_{t+1}-2y_t=2^t$通解为$y_t=$

（11）设生产某产品的平均成本$\bar{C}(q)=1+e^{-q}$，其中产量为q，则边际成本为

（12）设函数$f(x,y)$具有一阶连续偏导数，且$df(x,y)=ye^y dx+x(1+y)e^y dy$，$f(0,0)=0$，则$f(x,y)=$

（13）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的3维列向量组。则向量组$A\alpha_1$、$A\alpha_2$、$A\alpha_3$的秩为

（14）设随机变量X的概率分布为$P\left\{X=-2\right\}=\frac{1}{2}$，$P\left\{X=1\right\}=a$，$P\left\{X=3\right\}=b$，若$EX=0$，则$DX=$

三、解答题：15～23小题，共94分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分10分）

求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$

（16）（本题满分10分）

计算积分 $\iint\limits_D \dfrac{y^3}{\left(1+x^2+y^4\right)^2}dxdy$，其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域．

（17）（本题满分10分）

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{\lambda}\right)$

（18）（本题满分10分）

已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=k$ 在区间（0，1）内有实根，确定常数 k 的取值范围．

（19）（本题满分10分）

设$a_0=1$，$a_1=0$，$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\left(na_n+a_{n-1}\right)(n=1、2、3\cdots)$，$S(x)$为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数

（I）证幂$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径不小于1.

（II）证$(1-X)S'(x)-xS(x)=0(x\in(-1,1))$，并求$S(x)$表达式.

（20）（本题满分11分）

设3阶矩阵$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$有3个不同的特征值，且$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$.

（I）证明$r\left(A\right)=2$；

（II）若$\beta=a_1+a_2,a_3$，求方程组$Ax=\beta$的通解.

（21）（本题满分11分）

设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$在正交变换$x=Qy$下的标准形为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求$a$的值及一个正交矩阵$Q$.

（22）（本题满分11分）

设随机变来那个为X，Y相互独立，且X的概率分布为$P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，$Y$的概率密度为$f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

（I）求 $P(Y \le EY)$；

（II）求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

（23）（本题满分11分）

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$．该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差

$Z_i = \left|X_i - \mu\right| (i = 1, 2, \cdots n)$，利用 $Z_1, Z_2, \cdots Z_n$ 估计 σ .

（I）求 Z_1 的概率密度；

（II）利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

（III）求 σ 的最大似然估计量.