

2016年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试题

一、选择题: 1-8小题, 每小题4分, 共24分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

(1) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 ()

- A. 函数 $f(x)$ 有2个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有2个拐点
- B. 函数 $f(x)$ 有2个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有3个拐点
- C. 函数 $f(x)$ 有3个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有1个拐点
- D. 函数 $f(x)$ 有3个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有2个拐点

(2) 已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则 ()

- A. $f'_x - f'_y = 0$
- B. $f'_x + f'_y = 0$
- C. $f''_x - f''_y = f$
- D. $f''_x - f''_y = f$

(3) 设 $J_k = \iint_{D_i} \sqrt[3]{x-y} dx dy (i=1, 2, 3)$, 其中 $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ $D_3 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$ 则 ()

- A. $J_1 < J_2 < J_3$
- B. $J_3 < J_1 < J_2$
- C. $J_2 < J_3 < J_1$
- D. $J_2 < J_1 < J_3$

(4) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k)$ (k 为常数) ()

- A. 绝对收敛
- B. 条件收敛
- C. 发散
- D. 收敛性与 k 有关

(5) 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是 ()

- A. A^T 与 B^T 相似
- B. A^{-1} 与 B^{-1} 相似
- C. $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似
- D. $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似

三、解答题：15-23小题，共94分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分10分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$ 。

(16) (本题满分10分)

设某商品的最大需求量为1200件，该商品的需求函数 $Q = Q(p)$ ，需求弹性

$$\eta = \frac{p}{120 - p} (\eta > 0), \quad p \text{ 为单价 (万元)}。$$

(I) 求需求函数的表达式；

(II) 求 $p = 100$ 万元时的边际效益，并说明其经济意义。

(17) 设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$ ，求 $f'(x)$ ，并求 $f(x)$ 的最小值。

(18) (本题满分10分)

设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t) dt = \int_0^x (x-t)f(t) dt + e^{-x} - 1$ ，求 $f(x)$ 。

(19) (本题满分10分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数。

(20) (本题满分11分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解,

求: (1) 求 a 的值

(2) 求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

(21) (本题满分11分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(I) 求 A^{99}

(II) 设3阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$ 。记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合。

(22) (本题满分11分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分

布, 令 $U = \begin{cases} 1, & X \leq Y. \\ 0, & X > Y. \end{cases}$

(I) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(II) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(III) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

(23) (本题满分11分)

设总体 X 的概率密度 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, X_3 为来自 X 的简单随机样本, 令

$T = \max(X_1, X_2, X_3)$ 。

(1) 求 T 的概率密度;

(2) 确定 a , 使得 $E(aT) = \theta$ 。

2015年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题:1~8小题, 每小题4分, 共32分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $\{x_n\}$ 是数列, 下列命题中不正确的是: ()

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$

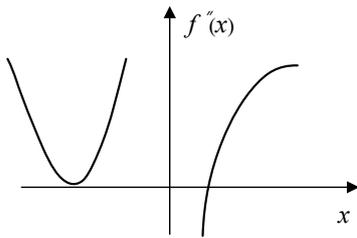
(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其二阶导函数 $f''(x)$ 的图形如下图所示,

则曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数为:



(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

(3) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则

$\iint_D f(x, y) dx dy = ()$

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$