

## 2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设  $\{x_n\}$  是数列,下列命题中不正确的是:

(A) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$

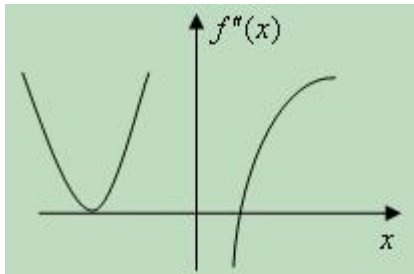
(B) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(C) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$

(D) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(2) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续,其 2 阶导函数  $f''(x)$  的图形如下图所示,则曲线

$y = f(x)$  的拐点个数为:



(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(3) 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y\}$ , 函数  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy =$$

(A)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

(B)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

(C)  $2 \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^x f(x, y) dy$

(D)  $2 \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$

(4) 下列级数中发散的是：

(A)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

(B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(C)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}$

(D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(5) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$ . 若集合  $\Omega = \{1, 2\}$ , 则线性方程组  $Ax = b$  有无穷

多解的充分必要条件为：

(A)  $a \notin \Omega, d \notin \Omega$

(B)  $a \notin \Omega, d \in \Omega$

(C)  $a \in \Omega, d \notin \Omega$

(D)  $a \in \Omega, d \in \Omega$

(6) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换为  $x = Py$  下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ , 其中

$P = (e_1, e_2, e_3)$ , 若  $Q = (e_1, -e_3, e_2)$ , 则  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准形为：

(A)  $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

(B)  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(C)  $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

(D)  $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

(7) 若  $A, B$  为任意两个随机事件, 则:

(A)  $P(AB) \leq P(A)P(B)$

(B)  $P(AB) \geq P(A)P(B)$

(C)  $P(AB) \leq \frac{P(A)+P(B)}{2}$

(D)  $P(AB) \geq \frac{P(A)+P(B)}{2}$

(8) 设总体  $X \sim B(m, \theta)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自该总体的简单随机样本,  $\bar{X}$  为样本均值,

则  $E \left[ \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] =$

(A)  $(m-1)n\theta(1-\theta)$

(B)  $m(n-1)\theta(1-\theta)$

(C)  $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$

(D)  $mn\theta(1-\theta)$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} =$  \_\_\_\_\_.

(10) 设函数  $f(x)$  连续,  $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt$ , 若  $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 5$ , 则  $f(1) =$  \_\_\_\_\_.

(11) 若函数  $z = z(x, y)$  由方程  $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$  确定, 则  $dz|_{(0,0)} =$  \_\_\_\_\_.

(12) 设函数  $y = y(x)$  是微分方程  $y'' + y' - 2y = 0$  的解，且在  $x = 0$  处取得极值 3，则

$$y(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(13) 设 3 阶矩阵  $A$  的特征值为  $2, -2, 1$ ， $B = A^2 - A + E$ ，其中  $E$  为 3 阶单位矩阵，则行列式  $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(14) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从正态分布  $N(1, 0; 1, 1; 0)$ ，则  $P\{XY - Y < 0\} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$ ， $g(x) = kx^3$ ，若  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x \rightarrow 0$  是等价无穷小，求  $a, b, k$  的值。

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分  $\iint_D x(x+y) dx dy$ ，其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$ 。

(17) (本题满分 10 分)

为了实现利润的最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设  $Q$  为该商品的需求量， $P$  为价格， $MC$  为边际成本， $\eta$  为需求弹性 ( $\eta > 0$ )。

(I) 证明定价模型为  $P = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}}$ ；

(II) 若该商品的成本函数为  $C(Q) = 1600 + Q^2$ ，需求函数为  $Q = 40 - P$ ，试由 (I) 中的定价模型确定此商品的价格。

(18) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在定义域  $I$  上的导数大于零，若对任意的  $x_0 \in I$ ，由线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处的切线与直线  $x = x_0$  及  $x$  轴所围成区域的面积恒为 4，且  $f(0) = 2$ ，求  $f(x)$

的表达式.

(19) (本题满分 10 分)

(I) 设函数  $u(x), v(x)$  可导, 利用导数定义证明  $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

(II) 设函数  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  可导,  $f(x) = u_1(x)u_2(x) \cdots u_n(x)$ , 写出  $f(x)$  的求导公式.

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ , 且  $A^3 = O$ .

(I) 求  $a$  的值;

(II) 若矩阵  $X$  满足  $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$ , 其中  $E$  为 3 阶单位矩阵, 求  $X$ .

(21) (本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$  相似于矩阵  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

(I) 求  $a, b$  的值;

(II) 求可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为对角矩阵.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

对  $X$  进行独立重复的观测, 直到 2 个大于 3 的观测值出现的停止. 记  $Y$  为观测次数.

(I) 求  $Y$  的概率分布;

(II) 求  $E(Y)$

(23) (本题满分 11 分)

设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中  $\theta$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本.

- (I) 求  $\theta$  的矩估计量.
- (II) 求  $\theta$  的最大似然估计量.