

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有:

(A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$

(B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$

(C) $a_n > a - \frac{1}{n}$

(D) $a_n < a + \frac{1}{n}$

(2) 下列曲线有渐近线的是:

(A) $y = x + \sin x$

(B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$

(D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

(3) 设 $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $P(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下

列试题中错误的是:

(A) $a = 0$

(B) $b = 1$

(C) $c = 0$

(D) $d = \frac{1}{6}$

(4) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上:

(A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$

(B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$

(D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

(5) 行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$$

(A) $(ad - bc)^2$

(B) $-(ad - bc)^2$

(C) $a^2d^2 - b^2c^2$

(D) $b^2c^2 - a^2d^2$

(6) 设 a_1, a_2, a_3 均为三维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $a_1 + ka_3, a_2 + la_3$ 线性无关是向量

组 a_1, a_2, a_3 线性无关的:

(A) 必要非充分条件

(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分也非必要条件

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5$, $P(A - B) = 0.3$, 则 $P(B - A) =$

(A) 0.1

(B) 0.2

(C) 0.3

(D) 0.4

(8) 设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $S = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从

的分布为

(A) $F(1, 1)$

(B) $F(2,1)$

(C) $t(1)$

(D) $t(2)$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2p$ (p 为商品的价格)，则该商品的边际收益为 _____。

(10) 设 D 是由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为 _____。

(11) 设 $\int_0^a x e^{2x} dx = \frac{1}{4}$ ，则 $a =$ _____。

(12) 二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right) dx =$ _____。

(13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围 _____。

(14) 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数，

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单样本，若 $E\left(c \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \theta^2$ ，则 $c =$ _____。

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}.$$

(16) (本题满分 10 分)

设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算 $\iint_D \frac{x \sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\cos y \frac{\partial z}{\partial x} - \sin y \frac{\partial z}{\partial y} = (4z + e^x \cos y) e^x.$$

若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

(18) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$, 证明:

(I) $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b]$;

(II) $\int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx$.

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

(21) (本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$ ，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量

Y 服从均匀分布 $U(0, i), (i=1, 2)$.

(I) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(II) 求 EY .

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X, Y 的概率分布相同， X 的概率分布为 $P\{X=0\} = \frac{1}{3}, P\{X=1\} = \frac{2}{3}$ ，且 X

与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$.

(I) 求 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $P\{X+Y \leq 1\}$.