

## 2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当  $x \rightarrow 0$  时,用“ $o(x)$ ”表示比  $x$  高阶的无穷小,则下列式子中错误的是:

(A)  $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$

(B)  $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$

(C)  $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$

(D)  $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

(2) 函数  $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$  的可去间断点的个数为:

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(3) 设  $D_k$  是圆域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  位于第  $k$  象限的部分,记  $I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy$

( $k=1,2,3,4$ ), 则:

(A)  $I_1 > 0$

(B)  $I_2 > 0$

(C)  $I_3 > 0$

(D)  $I_4 > 0$ .

(4) 设  $\{a_n\}$  为正项数列,下列选项正确的是:

(A) 若  $a_n > a_{n+1}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  收敛

(B) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  收敛, 则  $a_n > a_{n+1}$

(C) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则存在常数  $p > 1$ , 使  $\lim_{x \rightarrow \infty} n^p a_n$  存在

(D) 若存在常数  $p > 1$ , 使  $\lim_{x \rightarrow \infty} n^p a_n$  存在, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛

(5) 设  $A, B, C$  均为  $n$  阶矩阵, 若  $AB = C$ , 且  $B$  可逆. 则:

(A) 矩阵  $C$  的行向量组与矩阵  $A$  的行向量组等价

(B) 矩阵  $C$  的列向量组与矩阵  $A$  的列向量组等价

(C) 矩阵  $C$  的行向量组与矩阵  $B$  的行向量组等价

(D) 矩阵  $C$  的列向量组与矩阵  $B$  的列向量组等价

(6) 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  相似的充分必要条件为:

(A)  $a=0, b=2$

(B)  $a=0, b$  为任意常数

(C)  $a=2, b=0$

(D)  $a=2, b$  为任意常数

(7) 设  $X_1, X_2, X_3$  是随机变量, 且  $X_1 \sim N(0,1)$ ,  $X_2 \sim N(0,2^2)$ ,  $X_3 \sim N(5,3^2)$ ,

$p_j = P\{-2 \leq X_j \leq 2\}$  ( $j=1,2,3$ ), 则:

(A)  $p_1 > p_2 > p_3$

(B)  $p_2 > p_1 > p_3$

(C)  $p_3 > p_1 > p_2$

(D)  $p_1 > p_3 > p_2$

(8) 设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立, 则  $X$  和  $Y$  的概率分布分别为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$Y$	-1	0	1
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则  $P\{X+Y=2\} =$  :

- (A)  $\frac{1}{12}$   
 (B)  $\frac{1}{8}$   
 (C)  $\frac{1}{6}$   
 (D)  $\frac{1}{2}$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 设曲线  $y = f(x)$  与  $y = x^2 - x$  在点  $(1, 0)$  处有公共切线，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right) =$  \_\_\_\_\_.

(10) 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $(z+y)^x = xy$  确定，则  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} =$  \_\_\_\_\_.

(11)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx =$  \_\_\_\_\_.

(12) 微分方程  $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$  的通解为  $y =$  \_\_\_\_\_.

(13) 设  $A = (a_{ij})$  是 3 阶非零矩阵， $|A|$  为  $A$  的行列式， $A_{ij}$  为  $a_{ij}$  的代数余子式，若  $a_{ij} + A_{ij} = 0$  ( $i, j = 1, 2, 3$ )，则  $|A| =$  \_\_\_\_\_.

(14) 设随机变量  $X$  服从标准正态分布  $N(0,1)$ ，则  $E(Xe^{2X}) =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$  与  $ax^n$  为等价无穷小, 求  $n$  与  $a$  的值.

(16) (本题满分 10 分)

设  $D$  是由曲线  $y = x^{\frac{1}{3}}$ , 直线  $x = a (a > 0)$  及  $x$  轴所围成的平面图形,  $V_x, V_y$  分别是  $D$  绕  $x$  轴,  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积, 若  $V_y = 10V_x$ , 求  $a$  的值.

(17) (本题满分 10 分)

设平面区域  $D$  由直线  $x = 3y, y = 3x$ , 及  $x + y = 8$  围成, 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ .

(18) (本题满分 10 分)

设生产某产品的固定成本为 60000 元, 可变成本为 20 元/件, 价格函数为  $p = 60 - \frac{Q}{1000}$ ,

( $p$  是单价, 单位: 元,  $Q$  是销量, 单位: 件), 已知产销平衡, 求:

(I) 该商品的边际利润; (II) 当  $p = 50$  时的边际利润, 并解释其经济意义;

(III) 使得利润最大的定价  $p$ .

(19) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可导,  $f(0) = 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ . 证明:

(I) 存在  $a > 0$ , 使得  $f(a) = 1$ ;

(II) 对 (I) 中的  $a$ , 存在  $\xi \in (0, a)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{1}{a}$ .

(20) (本题满分 11 分)

设  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ , 当  $a, b$  为何值时, 存在矩阵  $C$  使得  $AC - CA = B$ , 并求所有

矩阵  $C$ .

(21) (本题满分 11 分)

设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$ , 记

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(I) 证明二次型  $f$  对应的矩阵为  $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ ;

(II) 若  $\alpha, \beta$  正交且均为单位变量, 证明  $f$  在正交变换下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2$ .

(22) (本题满分 11 分)

设  $(X, Y)$  是二维随机变量,  $X$  的边缘概率密度为  $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  在给定

$X = x(0 < x < 1)$  的条件下  $Y$  的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

(I) 求  $(X, Y)$  的概率密度  $f(x, y)$ ;

(II) 求  $Y$  的边缘概率密度  $f_Y(y)$ ;

(III) 求  $P\{X > 2Y\}$ .

(23) (本题满分 11 分)

设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中  $\theta$  为未知参数且大于零,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本.

(I) 求  $\theta$  的矩估计量;

(II) 求  $\theta$  的最大似然估计量.