2012年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为：

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$：

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.

(B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.

(D) $(-1)^n n!$.

(3) 设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(r^2)rdr=$：

(A) $\int_0^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dy$.

(B) $\int_0^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)dy$.

(C) $\int_0^2dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dx$.

(D) $\int_0^2dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)dx$.

(4) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则：

(A) $0<\alpha\le\dfrac{1}{2}$.

(B) $\frac{1}{2}<\alpha\le 1$.

(C) $1<\alpha\le\frac{3}{2}$.

(D) $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

(5) 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中$c_1,c_2,c_3,c_4$为任意常数，则下列向量组线性相关的为：

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(6) 设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，$\boldsymbol{P}$为3阶可逆矩阵，且$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$：

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，则 $P\left\{X^2+Y^2\le 1\right\}=$：

(A) $\frac{1}{4}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{\pi}{8}$.

(D) $\frac{\pi}{4}$.

(8) 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $X\sim N(1,\sigma^2)$（$\sigma>0$）的简单随机样本，则统计量 $\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布为：

(A) $N(0,1)$.

(B) $t(1)$.

(C) $\chi^2(1)$.

(D) $F(1,1)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$_________.

(10) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}\,,x\ge 1,\\ 2x-1\,,x<1,\end{cases}$，$y=f\left(f(x)\right)$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}=$_________.

(11) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $\left.dz\right|_{(0,1)}=$_________.

(12) 由曲线 $y=\frac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为_________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第1行与第2行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\left|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*\right|=$_________.

(14) 设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P\left(AB\right)=\frac{1}{2}$, $P\left(C\right)=\frac{1}{3}$, 则

$P\left(AB\middle|\overline{C}\right)=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）**（本题满分 10 分）**

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

（16）**（本题满分 10 分）**

计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x},y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

（17）**（本题满分 10 分）**

某企业为生产甲、乙两种型号的产品，投入的固定成本为10000 (万元)，设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x (件) 和 y (件)，且这两种产品的边际成本分别为 $20+\dfrac{x}{2}$ (万元/件) 与 $6+y$ (万元/件).

(I) 求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$ (万元)；

(II) 当总产量为 50 件时，甲、乙两种产品产量各为多少时可使总成本最小？求最小成本；

(III) 求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义.

(18)（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2},(-1<x<1)$.

（19）**（本题满分 10 分）**

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$.

(I) 求 $f(x)$ 的表达式；

(II) 求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 的拐点.

（20）**（本题满分 11 分）**

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(I) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$；

(II) 当实数 a 为何值时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，并求其通解.

(21) (本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\-1 & 0 & a\\0 & a & -1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2 .

(I) 求实数 a 的值；
(II) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将 f 化为标准形.

(22) (本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求 $P\{X=2Y\}$；

(II) 求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且服从参数为 1 的指数分布. 记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$.

(I) 求 V 的概率密度 $f_V(v)$；

(II) 求 $E(U+V)$.