2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 已知当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则：

(A) $k = 1, c = 4$.

(B) $k = 1, c = -4$.

(C) $k = 3, c = 4$.

(D) $k = 3, c = -4$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，且 $f(0) = 0$，则 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$

(A) $-2f'(0)$.

(B) $-f'(0)$.

(C) $f'(0)$.

(D) 0 .

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是：

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛.

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$， $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$， $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$，则 I,J,K 的大小关系是：

(A) $I<J<K$.
(B) $I<K<J$.
(C) $J<I<K$.
(D) $K<J<I$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第2列加到第1列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第2行与第3行得单位矩阵，记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.

(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.

(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.

(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的3个线性无关的解，k_1,k_2 为任意常数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为：

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.
(B) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.
(C) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$.
(D) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是：

(A) $f_1(x)f_2(x)$.

(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.

(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\ge 2)$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则对应的统计量 $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，和 $T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$，有：

(A) $E(T_1)>E(T_2)$，$D(T_1)>D(T_2)$.

(B) $E(T_1)>E(T_2)$，$D(T_1)<D(T_2)$.

(C) $E(T_1)<E(T_2)$，$D(T_1)>D(T_2)$.

(D) $E(T_1)<E(T_2)$，$D(T_1)<D(T_2)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $f\left(x\right)=\lim\limits_{t\to 0}x\left(1+3t\right)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'\left(x\right)=$________.

(10) 设函数 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $dz\Big|_{(1,1)}=$________.

(11) 曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=e^{y}$ 在点 $\left(0,0\right)$ 处的切线方程为________.

(12) 曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为________.

(13) 设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1，$\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.

(14) 设二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 服从正态分布 $N\left(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0\right)$，则 $E\left(XY^2\right)$=________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分 10 分）

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln\left(1+x\right)}$.

(16) **(本题满分 10 分)**

已知函数$f\left(u,v\right)$具有二阶连续偏导数，$f\left(1,1\right)=2$是$f\left(u,v\right)$的极值，$z=f\left[x+y,f\left(x,y\right)\right]$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}$.

(17) **(本题满分 10 分)**

求$\int\dfrac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

(18) **(本题满分 10 分)**

证明方程$4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$恰有两个实根.

(19) **(本题满分 10 分)**

设函数$f(x)$在$\left[0,1\right]$上具有连续导数，$f(0)=1$，且满足$\iint\limits_{D_t}f'(x+y)dxdy=\iint\limits_{D_t}f(t)dxdy$，$D_t=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le t-x,0\le x\le t\right\}(0<t\le 1)$，求$f(x)$的表达式.

(20) **(本题满分 11 分)**

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^T$不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^T$线性表示.

(I) 求a的值;

(II) 将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

(21) **(本题满分 11 分)**

设$\boldsymbol{A}$为3阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$的秩为2，且$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(I) 求$\boldsymbol{A}$的所有特征值与特征向量；(II) 求矩阵$\boldsymbol{A}$.

(22)（**本题满分 11 分**）

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$.

(I) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

(II) 求 $Z=XY$ 的概率分布；

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布，其中 G 是由 $x-y=0,x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的三角形区域.

(I) 求边缘概率密度 $f_X(x)$；

(II) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$.