2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）

一、选择题(1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$，则 a 等于

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.

(2) 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则：

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$.
(B) $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$.
(C) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$.
(D) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$.

(3) 设函数 $f(x),g(x)$ 具有二阶导数，且 $g''(x)<0$，若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f\left[g(x)\right]$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是：

(A) $f'(a)<0$.

(B) $f'(a)>0$.

(C) $f''(a)<0$.

(D) $f''(a)>0$.

(4) 设 $f(x)=\ln^{10}x, g(x)=x, h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有：

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$.

(B) $h(x)<g(x)<f(x)$.

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$.

(D) $g(x)<f(x)<h(x)$.

(5) 设向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，下列命题正确的是：

(A) 若向量组Ⅰ线性无关，则 $r\le s$.
(B) 若向量组Ⅰ线性相关，则 $r>s$.
(C) 若向量组Ⅱ线性无关，则 $r\le s$.
(D) 若向量组Ⅱ线性相关，则 $r>s$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于：

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1,\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$

(A) 0.

(B) $\dfrac{1}{2}$.

(C) $\dfrac{1}{2}-e^{-1}$.

(D) $1-e^{-1}$.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若

$f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\le 0,\\ bf_2(x), & x>0,\end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 为概率密度，则 a,b 应满足：

(A) $2a+3b=4$.

(B) $3a+2b=4$.

(C) $a+b=1$.

(D) $a+b=2$.

二、填空题(9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}e^{-t^2}dt=\int_0^x x\sin t^2dt$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________.

(10) 设位于曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2x)}}$ $(e\le x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为________.

(11) 设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$________.

(12) 若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$________.

(13) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为3阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3,|\boldsymbol{B}|=2,|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$________.

(14) 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$ 的简单随机样本，记统计量

$T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则$E(T)=$________.

三、解答题（15~23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15) **（本题满分 10 分）**

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

(16) **（本题满分 10 分）**

计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)^3dxdy$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成.

(17) **（本题满分 10 分）**

求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

(18) **（本题满分 10 分）**

(I) 比较 $\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt\ (n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由；

(II) 记 $u_n=\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt\ (n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(19) **（本题满分 10 分）**

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内存在二阶导数，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$.

(I) 证明存在 $\eta\in(0,2)$，使 $f(\eta)=f(0)$；

(II) 证明存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi)=0$.

(20) **（本题满分 11 分）**

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在 2 个不同的解.

(I) 求 λ，a；

(II) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(21)（**本题满分 11 分**）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵，若 $\boldsymbol{Q}$ 的第1列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求 $a,\boldsymbol{Q}$.

(22)（**本题满分 11 分**）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2}$，$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$，求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$.

(23)（本题满分 11 分）

箱中装有6个球，其中红、白、黑球的个数分别为1,2,3个，现从箱中随机地取出2个球，记 X 为取出的红球个数，Y 为取出的白球个数.

(I) 求随机变量 (X,Y) 的概率分布；

(II) 求 $Cov(X,Y)$.