

2021 考研数学真题试卷

数学(二)

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分.每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求,把所选选项前的字母填在答题卡指定位置上)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1) dt$ 是 x^7 的 () 无穷小.
 (A) 低阶 (B) 等价 (C) 高阶 (D) 同阶但非等价
2. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处 ()
 (A) 连续且取极大值 (B) 连续且取极小值
 (C) 可导且导数为 0 (D) 可导且导数不为 0
3. 有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为 2cm/s , -3cm/s , 当底面半径为 10cm , 高为 5cm 时, 圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为 ().
 (A) $125\pi\text{cm}^3/\text{s}$, $40\pi\text{cm}^2/\text{s}$ (B) $125\pi\text{cm}^3/\text{s}$, $-40\pi\text{cm}^2/\text{s}$
 (C) $-100\pi\text{cm}^3/\text{s}$, $40\pi\text{cm}^2/\text{s}$ (D) $-100\pi\text{cm}^3/\text{s}$, $-40\pi\text{cm}^2/\text{s}$
4. 设函数 $f(x) = ax - b \ln x$ ($a > 0$) 有两个零点, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 ().
 (A) $(e, +\infty)$ (B) $(0, e)$ (C) $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ (D) $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$
5. 设函数 $f(x) = \sec x$ 在 $x = 0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1 + ax + bx^2$, 则 ()
 (A) $a = 1, b = -\frac{1}{2}$ (B) $a = 1, b = \frac{1}{2}$
 (C) $a = 0, b = -\frac{1}{2}$ (D) $a = 0, b = \frac{1}{2}$
6. 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) =$ ().
 (A) $dx + dy$ (B) $dx - dy$ (C) dy (D) $-dy$
7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ ().
 (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$
 (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$ (D) $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \cdot \frac{2}{n}$

8. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为 ()

- (A) 2, 0 (B) 1, 1 (C) 2, 1 (D) 1, 2

9. 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由向量组 β_1, β_2 线性表示, 则 () .

- (A) $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解 (B) $A^T x = 0$ 的解均是 $B^T x = 0$ 的解
 (C) $Bx = 0$ 的解均是 $Ax = 0$ 的解 (D) $B^T x = 0$ 的解均是 $A^T x = 0$ 的解

10. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, 若下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q , 使 PAQ 为

对角矩阵, 则 P, Q 可以分别取 () .

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

11. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| 3^{-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 确定, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设函数 $z = z(x, y)$ 由参数方程 $(x+1)z + y \ln z - \arctan(2xy) = 1$ 确定, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知函数 $f(t) = \int_1^t dx \int_{\sqrt{x}}^1 \sin \frac{x}{y} dy$, 则 $f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 微分方程 $y''' - y = 0$ 的通解 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为_____.

三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分。请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

18.（本题满分 12 分）

已知 $f(x) = \frac{x|x|}{1+x}$ ，求 $f(x)$ 的凹凸性及渐近线.

19.（本题满分 12 分）

$f(x)$ 满足 $\int \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{6}x^2 - x + C$ ， L 为曲线 $y = f(x)$ ($4 \leq x \leq 9$)， L 的弧长为 s ， L

绕 x 轴旋转一周所形成的曲面的面积为 A ，求 s 和 A 。

20.（本题满分 12 分）

函数 $y = y(x)$ 的微分方程为 $xy' - 6y = -6$ ，满足 $y(\sqrt{3}) = 10$ ，

(1) 求 $y(x)$ ，

(2) P 为曲线 $y = y(x)$ 上的一点，曲线 $y = y(x)$ 在 P 处的法线在 y 轴上的截距为 I_y ，为

使最小 I_y ，求 P 的坐标.

21.（本题满分 12 分）

曲线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 与 x 轴围成的区域为 D ，求 $\iint_D xy dx dy$ 的值.

22.（本题满分 12 分）

已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值，若 A 相似于对角矩阵，求 a, b 的值，并求

可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.