2020年全国硕士研究生招生考试数学二试题

一、选择题：**1~8**题，每小题**4**分，共**32**分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

（1）当 $x \to 0^+$ 时，下列无穷小量中最高阶的是（　　）

A. $\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right)dt$　　B. $\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$　　D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt$

（2）函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{\left(e^x-1\right)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

（3）$\int_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=$（　　）

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$　　B. $\dfrac{\pi^2}{8}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{8}$

（4）已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$，当 $n\geq 3$ 时，$f^{(n)}(0)=$（　　）

A. $-\dfrac{n!}{n-2}$　　B. $\dfrac{n!}{n-2}$

C. $-\dfrac{(n-2)!}{n}$　　D. $\dfrac{(n-2)!}{n}$

（5）关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy, xy\neq 0 \\ x, y=0 \\ y, x=0 \end{cases}$,给出下列结论：（　　）

①$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$；②$\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1$；③$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$；④$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$.

其中正确的个数为（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

（6）设函数$f(x)$在区间$[-2,2]$上可导，且$f'(x)>f(x)>0$．则（　　）

A．$\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$　　　　B．$\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e$

C．$\dfrac{f(1)}{f(-1)}<e^2$　　　　D．$\dfrac{f(2)}{f(-1)}<e^3$

（7）设4阶矩阵$A=(a_{ij})$不可逆，a_{12}的代数余子式$A_{12}\neq 0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为矩阵$A$的列向量组，$A^*$为$A$的伴随矩阵，则方程组$A^*x=0$的通解为（　　）

A．$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意数

B．$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意数

C．$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意数

D．$x=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意数

（8）设A为3阶矩阵，α_1,α_2为A的属于特征值1的线性无关的特征向量，α_3为A的属于特征值-1的特征向量，则满足$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$的可逆矩阵$P$可为（　　）

A．$(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2,-\alpha_3)$　　　　B．$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,-\alpha_3)$

C．$(\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_2)$　　　　D．$(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)$

二、填空题：**9~14**小题，每小题**4**分，共**24**分．请将答案写在横线上．

（9）设$\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1}\\y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\end{cases}$，则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$________．

（10）$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}\,dx=$________．

（11）设$z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则$\left.dz\right|_{(0,\pi)}=$________．

（12）斜边长为$2a$的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐，记重力加速度为g，水的密度为ρ，则该平板一侧所受的水压力为________.

（13）设$y=y(x)$满足$y''+2y'+y=0$，且$y(0)=0$，$y'(0)=1$，则$\int_0^{+\infty}y(x)dx=$________.

（14）行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$________.

三、解答题：**15~23**小题，共**94**分．解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

（15）（本题满分10分）

求曲线$y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$的斜渐近线方程.

（16）（本题满分10分）

已知函数$f(x)$连续且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，求$g'(x)$并证明$g'(x)$在$x=0$处连续.

（17）（本题满分10分）

求函数$f(x,y)=x^3+8y^3-xy$的极值.

（18）（本题满分10分）

设函数$f(x)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$且满足$2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$．求

$f(x)$，并求曲线$y=f(x)$，$y=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$及y轴所围图形绕x轴旋转所成转体

的体积．

（19）（本题满分10分）

设平面区域D由直线$x=1$，$x=2$，$y=x$与x轴围成，计算

$\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dxdy$．．

（20）（本题满分11分）

设函数$f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$．

（Ⅰ）证明：存在$\xi\in(1,2)$，使得$f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$；

（Ⅱ）证明：存在$\eta\in(1,2)$，使得$f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}$．

（21）（本题满分11分）

设函数$f(x)$可导，且$f'(x)>0$，曲线$y=f(x)(x\geq 0)$经过坐标原点O，其上任意一点M处的切线与x轴交于T，又MP垂直x轴与点P．已知由曲线$y=f\left(x\right)$，直线MP以及x轴所围图形的面积与ΔMTP的面积之比恒为3:2，求满足上述条件的曲线的方程．

（22）（本题满分11分）

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$经过可逆线性变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$化为二次型$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

（Ⅰ）求a的值；

（Ⅱ）求可逆矩阵P.

（23）（本题满分11分）

设A为2阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$，其中α是非零向量且不是A的特征向量.

（Ⅰ）证明P为可逆矩阵；

（Ⅱ）若$A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求$P^{-1}AP$，并判断$A$是否相似于对角矩阵.