2019年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：**1~8**小题，每小题**4**分，共**32**分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

（1）当$x\to 0$时，若$x-\tan x$与x^k是同阶无穷小，则$k=$（　　）

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

（2）曲线$y=x\sin x+2\cos x\left(-\frac{\pi}{2}<x<2\pi\right)$的拐点是（　　）

(A)$(0,2)$　　(B)$(\pi,-2)$

(C)$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$　　(D)$\left(\frac{3\pi}{2},-\frac{3\pi}{2}\right)$

（3）下列反常积分发散的是（　　）

(A)$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$　　(B)$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

(C)$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$　　(D)$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$

（4）已知微分方程$y''+ay'+by=ce^x$的通解为$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}+e^x$，则$a,b,c$依次为（　　）

(A)1，0，1　　(B)1，0，2　　(C)2，1，3　　(D)2，1，4

（5）已知平面区域$D=\left\{(x,y)\middle\|x|+|y|\le\frac{\pi}{2}\right\}$，记$I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，

$I_2=\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，$I_3=\iint\limits_D\left(1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$则（　　）

(A)$I_3<I_2<I_1$　　(B)$I_2<I_1<I_3$

(C)$I_1<I_2<I_3$　　(D)$I_2<I_3<I_1$

（6）设函数 $f(x)$， $g(x)$ 的2阶导函数在 $x=a$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 是两条曲线 $y=f(x)$， $y=g(x)$ 在 $x=a$ 对应的点处相切及曲率相等的（　　）

(A)充分不必要条件　　(B)充分必要条件

(C)必要不充分条件　　(D)既不充分也不必要条件

（7）设 A 是4阶矩阵， A^* 为 A 的伴随矩阵，若线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系只有2个向量，则 $r\left(A^*\right)=$（　　）

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

（8）设 A 是3阶实对称矩阵， E 是3阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$，且 $|A|=4$，则二次型 x^TAx 的规范为（　　）

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　(B) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

二、填空题：**9~14**题，每小题**4**分，共**24**分.

（9） $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+2^x\right)^{\frac{x}{2}}=$_____

（10）曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{3\pi}{2}$ 对应点处的切线在 y 轴上的截距为_____

（11）设函数 $f(u)$ 可导， $z=yf\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$，则 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____

（12）曲线 $y=\ln\cos x\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的弧长为_____

（13）已知函数 $f(x)=x\displaystyle\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt$，则 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=$_____

（14）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{pmatrix}$， A_{ij} 表示 $|A|$ 中 (i,j) 元的代数余子式，则 $A_{11}-A_{12}=$_____.

三、解答题：**15~23**小题，共**94**分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤**.**

（15）（本题满分10分）

已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}, & x>0 \\ xe^{x}+1, & x\le 0 \end{cases}$，求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值.

（16）（本题满分10分）

求不定积分 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}dx$.

（17）（本题满分10分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{e}$ 的特解.

（1）求 $y(x)$；

（2）设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le 2, 0\le y\le y(x)\right\}$，求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

（18）（本题满分10分）

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle\|x|\le y, \left(x^2+y^2\right)^3\le y^4\right\}$，计算二重积分

$\iint\limits_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$.

（19）（本题满分10分）

设n是正整数，记S_n为曲线$y=e^{-x}\sin x(0\le x\le n\pi)$与$x$轴所围图形的面积．求$S_n$，并求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$．

（20）（本题满分11分）

已知函数$u(x,y)$满足$2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}+3\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，求$a,b$的值，使得在变换$u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$之下，上述等式可化为函数$v(x,y)$的不含一阶偏导数的等式.

（21）（本题满分11分）

已知函数$f(x)$在$[0,1]$上具有2阶导数，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)dx=1$，证明：

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$

（2）存在$\eta\in(0,1)$，使得$f'(\eta)<-2$

（22）（本题满分11分）

已知向量组

I：$\alpha_1=(1,1,4)^T$，$\alpha_2=(1,0,4)^T$，$\alpha_3=\left(1,2,a^2+3\right)^T$

II：$\beta_1=(1,1,a+3)^T$，$\beta_2=(0,2,1-a)^T$，$\beta_3=\left(1,3,a^2+3\right)^T$

若向量组I与向量组II等价，求a的取值，并将β_3用α_1，α_2，α_3线性表示

（23）（本题满分11分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

(1)求 x、y；

(2)求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.