2018年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：**1~8**小题，每小题**4**分，共**32**分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

（1）若$\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+ax^2+bx\right)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则（　　）

(A) $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-1$　　(B) $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=-1$

(C) $a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$　　(D) $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=1$

（2）下列函数中，在$x=0$处不可导的是（　　）

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

(C) $f(x)=\cos|x|$　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

（3）设函数$f(x)=\begin{cases}-1,x<0\\1,x\geq 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-ax,x\leq -1\\x,-1<x<0\\x-b,x\geq 0\end{cases}$，若$f(x)+g(x)$ 在R上连续，则（　　）

(A) $a=3$，$b=1$　　(B) $a=3$，$b=2$

(C) $a=-3$，$b=1$　　(D) $a=-3$，$b=2$

（4）设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$\int_0^1 f(x)dx=0$，则（　　）

(A)当$f'(x)<0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$　　(B)当$f''(x)<0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

(C)当$f'(x)>0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$　　(D)当$f''(x)>0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

（5）设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{e^x}dx$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$，则（　　）

(A) $M>N>K$　　(B) $M>K>N$

(C) $K>M>N$　　(D) $K>N>M$

（6）$\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy=$（　　）

(A)$\frac{5}{3}$　　(B)$\frac{5}{6}$　　(C)$\frac{7}{3}$　　(D)$\frac{7}{6}$

（7）下列矩阵中与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为（　　）

(A)$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B)$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C)$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(D)$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

（8）设A，B为n阶矩阵，记$r(X)$为矩阵X的秩，(X,Y)表示分块矩阵，则（　　）

(A)$r(A,AB)=r(A)$　　(B)$r(A,BA)=r(A)$

(C)$r(A,B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　(D)$r(A,B)=r\left(A^TB^T\right)$

二、填空题：**9~14**题，每小题**4**分，共**24**分.

（9）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$_____

（10）曲线$y=x^2+2\ln x$在其拐点处的切线方程是_____

（11）$\int_{5}^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=$_____

（12）曲线$\begin{cases}x=\cos^3 t\\y=\sin^3 t\end{cases}$，在$t=\frac{\pi}{4}$对应点处的曲率为_____

（13）设函数$z=(x,y)$ 由方程$\ln z+e^{z-1}=xy$确定，则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(2,\frac{1}{2}\right)}=$_____

（14）设A 为3阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的向量组，若

$A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_2=\alpha_2+2\alpha_3$，$A\alpha_3=-\alpha_2+\alpha_3$，则$A$ 的实特征值为

_____.

三、解答题：**15~23**小题，共**94**分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分10分）

求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$.

（16）（本题满分10分）

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=ax^2$

（I）求 $f(x)$；

（II）若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为1，求 a 的值.

（17）（本题满分10分）

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_D (x+2y)d\sigma$.

（18）（本题满分10分）

已知常数 $k\ge \ln 2-1$. 证明：$(x-1)\left(x-\ln^2 x+2k\ln x-1\right)\ge 0$.

（19）（本题满分10分）

将长为$2m$的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形．三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值．

（20）（本题满分11分）

已知曲线$L: y=\frac{4}{9}x^2(x\geq 0)$，点$O(0,0)$，点$A(0,1)$．设$P$是$L$上的动点，$S$是直线$OA$与直线$AP$及曲线$L$所围成图形的面积，若$P$运动到点$(3,4)$时沿$x$轴正向的速度是4，求此时$S$关于时间$t$的变化率．

（21）（本题满分11分）

设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0$，$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$，证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

（22）（本题满分11分）

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中$a$是参数．

(I)求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；

(II)求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形．

（23）（本题满分11分）

已知a是常数，且矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵

$B=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

(I)求a；

(II)求满足$AP=B$的可逆矩阵P.