2014年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当$x \to 0^+$时，若$\ln^{\alpha}(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$均是比$x$高阶的无穷小，则$\alpha$的取值范围是：

(A) $(2,+\infty)$

(B) $(1,2)$

(C) $(\frac{1}{2},1)$

(D) $(0,\frac{1}{2})$

(2) 下列曲线中有渐近线的是：

(A) $y=x+\sin x$

(B) $y=x^2+\sin x$

(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$

(D) $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

(3) 设函数$f(x)$具有2阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间$[0,1]$上：

(A) 当$f'(x)\ge 0$时，$f(x)\ge g(x)$
(B) 当$f'(x)\ge 0$时，$f(x)\le g(x)$
(C) 当$f''(x)\ge 0$时，$f(x)\ge g(x)$
(D) 当$f''(x)\ge 0$时，$f(x)\le g(x)$

(4) 曲线$\begin{cases} x=t^2+7 \\ y=t^2+4t+1 \end{cases}$上对应于$t=1$的点处的曲率半径是：

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$

(B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$

(C) $10\sqrt{10}$

(D) $5\sqrt{10}$

(5) 设函数 $f(x)=\arctan x$ ，若 $f(x)=xf'(\xi)$ ，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$

(A) 1

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{3}$

(6) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则：

(A) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得

(B) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部上取得

(C) $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得，最小值在 D 的边界上取得

(D) $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得，最大值在 D 的边界上取得

(7) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$

(A) $(ad-bc)^2$

(B) $-(ad-bc)^2$

(C) $a^2d^2-b^2c^2$

(D) $b^2c^2-a^2d^2$

(8) 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为3维向量，则对任意常数$k,l$，向量组$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关的：

(A) 必要非充分条件
(B) 充分非必要条件
(C) 充分必要条件
(D) 既非充分也非必要条件

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=$__________.

(10) 设$f(x)$是周期为4的可导奇函数，且$f'(x)=2(x-1),\quad x\in[0,2]$，则$f(7)=$__________.

(11) 设$z=z(x,y)$是由方程$e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$确定的函数，则$dz\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$__________.

(12) 曲线$r=r(\theta)$的极坐标方程是$r=\theta$，则L在点$(r,\theta)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$处的切线的直角坐标方程是__________.

(13) 一根长为1的细棒位于x轴的区间$[0,1]$上，若其线密度$\rho\left(x\right)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标$\overline{x}=$__________.

(14) 设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)={x_1}^2-{x_2}^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数为1，则$a$的取值范围为_______.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\right\}$, 计算 $\iint\limits_D \frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}$，若 $f(0)=0,f^{'}(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 的区间 $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$. 证明：

(I) $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,x\in[a,b]$,

(II) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)\mathrm{g}(x)dx$.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(\mathrm{x})=\frac{x}{1+x},x\in[0,1]$，定义函数列 $f_1(x)=f(x),f_2(x)=f(f_1(x)),\cdots,$ $f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots$，记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1$ 及 x 轴所围成平面图形的面积，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$.

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$, 求曲线 $f(x,y)=0$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积.

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$E$ 为三阶单位矩阵.

(I)求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；
(II)求满足 $AB=E$ 的所有矩阵.

(23)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.