2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是:

（A） 比 x 高阶的无穷小.
（B） 比 x 低阶的无穷小.
（C） 与 x 同阶但不等价的无穷小.
（D） 与 x 等价的无穷小.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]=$

（A）2.
（B）1.
（C）-1.
（D）-2.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi,\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi,\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则:

（A） $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点.

（B） $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

（C） $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导.

（D） $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导.

(4) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e,\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e,\end{cases}$ 若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则:

（A）$\alpha<-2$.
（B）$\alpha>2$.
（C）$-2<\alpha<0$.
（D）$0<\alpha<2$.

(5) 设 $z=\frac{y}{x}f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$

（A）$2yf'(xy)$.

（B）$-2yf'(xy)$.

（C）$\frac{2}{x}f(xy)$.

（D）$-\frac{2}{x}f(xy)$.

(6) 设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\left|x^2+y^2\le 1\right.\}$ 在第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy$

$(k=1,2,3,4)$，则：

（A）$I_1>0$.

（B）$I_2>0$.

（C）$I_3>0$.

（D）$I_4>0$.

(7) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则：
（A）矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.
（B）矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.
（C）矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.
（D）矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

(8) 矩阵 $\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为：

（A）$a=0,b=2$.
（B）$a=0,b$ 为任意常数.
（C）$a=2,b=0$.
（D）$a=2,b$ 为任意常数.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$_____.

(10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^{t}}dt$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}=$_____.

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{6}\right)$，则 L 所围平面图形的面积是_____.

(12) 曲线 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为_____.

(13) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x},y_2=e^{x}-xe^{2x},y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的3个解，则该方程满足条件 $y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$_____.

(14) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是3阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，$\boldsymbol{A_{ij}}$ 为 a_{ij} 的代数余子式．若 $a_{ij}+\boldsymbol{A_{ij}}=0\quad(i,j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$_____.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15) **（本题满分 10 分）**

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值．

(16) **（本题满分 10 分）**

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积．若 $V_y=10V_x$，求 a 的值．

(17) **（本题满分 10 分）**

设平面区域 D 由直线 $x=3y$，$y=3x$ 及 $x+y=8$ 围城，计算 $\iint\limits_{D}x^2dxdy$．

(18) **（本题满分 10 分）**

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$. 证明：

(I) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$；

(II) 存在 $\eta\in(-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19) **(本题满分 10 分)**

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geq 0,y\geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

(20) **(本题满分 11 分)**

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小值；

(II) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

(21) **(本题满分 11 分)**

设曲线 L 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x\ (1\leq x\leq e)$.

(I) 求 L 的弧长；

(II) 设 D 是由曲线 L, 直线 $x=1,x=e$ 及 x 轴所围平面图形, 求 D 的形心的横坐标.

(22) **(本题满分 11 分)**

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & b\end{pmatrix}$, 当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(23) **(本题满分 11 分)**

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}.$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$；

（II）若 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.