2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为：

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.

(B) $(-1)^{n}(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.

(D) $(-1)^{n}n!$.

(3) 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots), S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的：

(A) 充分必要条件.
(B) 充分非必要条件.
(C) 必要非充分条件.
(D) 非充分也非必要条件.

(4) 设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x dx\ (k=1,2,3)$，则有：

(A) $I_1<I_2<I_3$.

(B) $I_3<I_2<I_1$.

(C) $I_2<I_3<I_1$.

(D) $I_2<I_1<I_3$.

(5) 设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意的 x,y 都有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0,$ 则使不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是：

(A) $x_1>x_2,y_1<y_2$.

(B) $x_1>x_2,y_1>y_2$.

(C) $x_1<x_2,y_1<y_2$.

(D) $x_1<x_2,y_1>y_2$.

(6) 设区域 D 由曲线 $y=\sin x,x=\pm\frac{\pi}{2},y=1$ 围成，则 $\iint\limits_D (x^5y-1)dxdy=$

(A) π.
(B) 2.
(C) -2.
(D) $-\pi$.

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为：

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为3阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$_________.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$_________.

(11) 设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$,其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_________.

(12) 微分方程 $ydx+\left(x-3y^2\right)dy=0$ 满足条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$_________.

(13) 曲线 $y=x^2+x\left(x<0\right)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是_________.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第1行与第2行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=$_________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)$.

(I) 求 a 的值；

(II) 若当 $x\to 0$ 时，$f\left(x\right)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小，求常数 k 的值.

(16) **(本题满分 10 分)**

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17) **(本题满分 12 分)**

过点 $(0,1)$ 作曲线 $L:y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成，求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(18) **(本题满分 10 分)**

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$ 与极轴围成.

(19) **(本题满分 10 分)**

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$.

(I) 求 $f(x)$ 的表达式；

(II) 求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 的拐点.

(20) **(本题满分 10 分)**

证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2},(-1<x<1)$.

(21) **(本题满分 10 分)**

(I) 证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$（n 为大于1的整数），在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

(II) 记(I)中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

(22) **(本题满分 11 分)**

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

（I）计算行列式$|\boldsymbol{A}|$；

（II）当实数a为何值时，方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解，并求其通解.

(23)（本题满分 11 分）

已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$的秩为$2$.

（I）求实数a的值；

（II）求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$将$f$化为标准形.