

2011年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则：

(A) $k=1, c=4$.

(B) $k=1, c=-4$.

(C) $k=3, c=4$.

(D) $k=3, c=-4$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$

(A) $-2f'(0)$.

(B) $-f'(0)$.

(C) $f'(0)$.

(D) 0 .

(3) 函数 $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为：

(A) 0 .

(B) 1 .

(C) 2 .

(D) 3 .

(4) 微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} (\lambda > 0)$ 的特解形式为：

(A) $a(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$.

(B) $ax(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$.

(C) $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.

(D) $x^2(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.

(5) 设函数 $f(x), g(x)$ 均有二阶连续导数, 满足 $f(0) > 0, g(0) < 0$, 且 $f'(0) = g'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x)g(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是:

(A) $f''(0) < 0, g''(0) > 0$.

(B) $f''(0) < 0, g''(0) < 0$.

(C) $f''(0) > 0, g''(0) > 0$.

(D) $f''(0) > 0, g''(0) < 0$.

(6) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大小关系是:

(A) $I < J < K$.

(B) $I < K < J$.

(C) $J < I < K$.

(D) $K < J < I$.

(7) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得

单位矩阵, 记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A =$

(A) $P_1 P_2$.

(B) $P_1^{-1} P_2$.

(C) $P_2 P_1$.

(D) $P_2 P_1^{-1}$.

(8) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵， A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系，则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为：

(A) α_1, α_3 .

(B) α_1, α_2 .

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

(D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \lambda > 0$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设平面区域 D 由直线 $y = x$, 圆 $x^2 + y^2 = 2y$ 及 y 轴围成，则二重积分

$$\iint_D xy d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(14) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ ，则 f 的正惯性指数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

已知函数 $F(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha}$ ，设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$ ，试求 α 的取值范围。

(16) (本题满分 11 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3}, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3}, \end{cases}$ 确定，求 $y = y(x)$ 的极值和曲线 $y = y(x)$ 的

凹凸区间及拐点。

(17) (本题满分 9 分)

设函数 $z = f(xy, yg(x))$ ，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取

得极值 $g(1) = 1$ ，求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$ 。

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l: y = y(x)$ 与直线 $y = x$ 相切于原点，记 α 为曲线 l 在

点 (x, y) 处切线的倾角，若 $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}$ ，求 $y(x)$ 的表达式。

(19) (本题满分 10 分)

(I) 证明：对任意的正整数 n ，都有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ 成立。

(II) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ ($n = 1, 2, \dots$)，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

(20) (本题满分 11 分)

一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面，该曲线由 $x^2 + y^2 = 2y$ ($y \geq \frac{1}{2}$) 与 $x^2 + y^2 = 1$ ($y \leq \frac{1}{2}$) 连接而成的。

(I) 求容器的容积；

(II) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？(长度单位：m，重力加速度为 $g \text{ m/s}^2$ ，水的密度为 10^3 kg/m^3)。

(21) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1, y) = 0$ ， $f(x, 1) = 0$ ， $\iint_D f(x, y) dx dy = a$ ，

其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ，计算二重积分 $I = \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy$ 。

(22) (本题满分 11 分)

设向量组， $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$ ， $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$ ， $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$ ， $\beta_2 =$

$(1, 2, 3)^T$ ， $\beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示。

(I) 求 a 的值；

(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

(23) (本题满分 11 分)

A 为 3 阶实对称矩阵， A 的秩为 2，且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 。

(I) 求 A 的特征值与特征向量；

(II) 求矩阵 A 。