

2021 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求，把所选选项前的字母填在答题卡指定位置上）

1. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ ，在 $x=0$ 处（ ）。

- (A) 连续且取极大值 (B) 连续且取极小值
(C) 可导且导数为 0 (D) 可导且导数不为 0

2. 设函数 $f(x, y)$ 可微，且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$ ， $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$ ，则 $df(1, 1) =$ （ ）。

- (A) $dx + dy$ (B) $dx - dy$ (C) dy (D) $-dy$

3. 设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax + bx^2 + cx^3$ ，则（ ）

- (A) $a=1, b=0, c=-\frac{7}{6}$ (B) $a=1, b=0, c=\frac{7}{6}$
(C) $a=-1, b=-1, c=-\frac{7}{6}$ (D) $a=-1, b=-1, c=\frac{7}{6}$

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x) dx =$ （ ）。

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$
(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$ (D) $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \cdot \frac{2}{n}$

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为（ ）。

- (A) 2, 0 (B) 1, 1 (C) 2, 1 (D) 1, 2

6. 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ，记 $\beta_1 = \alpha_1$ ， $\beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1$ ，

$\beta_3 = \alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2$ ，若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 两两正交，则 l_1, l_2 依次为（ ）。

- (A) $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$ (B) $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$
(C) $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$

7. 设 A, B 为 n 阶实矩阵，下列不成立的是（ ）。

- (A) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T A \end{pmatrix} = 2r(A)$ (B) $r\begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$

$$(C) \ r \begin{pmatrix} A & BA \\ O & AA^T \end{pmatrix} = 2r(A) \qquad (D) \ r \begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$$

8. 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(B) < 1$, 下列命题中不成立的是 ().

- (A) 若 $P(A|B) = P(A)$, 则 $P(A|\bar{B}) = P(A)$
 (B) 若 $P(A|B) > P(A)$, 则 $P(\bar{A}|\bar{B}) > P(\bar{A})$
 (C) 若 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$, 则 $P(A|B) > P(A)$
 (D) 若 $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$, 则 $P(A) > P(B)$

9. 设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的简单随机

样本, 令 $\theta = \mu_1 - \mu_2$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, $\hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}$, 则 ().

- (A) $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$
 (B) $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$
 (C) $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$
 (D) $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

10. 设 X_1, X_2, \dots, X_{16} 是来自总体 $N(\mu, 4)$ 的简单随机样本, 考虑假设检验问题:

$H_0: \mu \leq 10, H_1: \mu > 10$. $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 若该检验问题的拒绝域为 $W = \{\bar{X} \geq 11\}$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i$, 则 $\mu = 11.5$ 时, 该检验犯第二类错误的概率为

- ().
 (A) $1 - \Phi(0.5)$ (B) $1 - \Phi(1)$
 (C) $1 - \Phi(1.5)$ (D) $1 - \Phi(2)$

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

11. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 确定, 则 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 欧拉方程 $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1, y'(1) = 2$ 得解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 设 Σ 为空间曲线区域 $\{(x, y, z) | x^2 + 4y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$ 表面的外侧, 则曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

15. 设 $A = a_{ij}$ 为 3 阶矩阵, A_{ij} 为代数余子式, 若 A 的每行元素之和均为 2, 且 $|A| = 3$, $A_{11} + A_{21} + A_{31} = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球, 先从甲盒中任取一球, 观察颜色后放入乙盒中, 再从乙盒中任取一球. 令 X, Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数, 则 X 与 Y 的相关系数_____.

三、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

18. (本题满分 12 分)

设 $u_n(x) = e^{-nx} + \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$), 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

19. (本题满分 12 分)

已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 6 \\ 4x + 2y + z = 30 \end{cases}$, 求 C 上的点到 xoy 坐标面距离的最大值.

20. (本题满分 12 分)

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界单连通闭区域, $I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$ 取得最大值的积分区域

记为 D_1 .

(1) 求 $I(D_1)$ 的值.

(2) 计算 $\int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2}$, 其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

21. (本题满分 12 分)

已知 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(1) 求正交矩阵 P , 使得 $P^T A P$ 为对角矩阵;

(2) 求正定矩阵 C , 使得 $C^2 = (a+3)E - A$.

22. (本题满分 12 分)

在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短的一段长度记为 X , 较长的一段长度记为 Y , 令 $Z = \frac{Y}{X}$.

求 Z 的概率密度.

(1) 求 X 的概率密度;

(2) 求 Z 的概率密度;

(3) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.