

2020年全国硕士研究生招生考试数学一试题

一、选择题：1~8题，每小题4分，共32分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时，下列无穷小量中最高阶的是 ()

- A. $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$ B. $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt$
 C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$ D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ，则 ()

- A. 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导
 B. 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导
 C. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$
 D. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

(3) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微， $f(0,0) = 0$ ， $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) \Big|_{(0,0)}$ ，非零

向量 $\vec{\alpha}$ 与 \vec{n} 垂直，则 ()

- A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\vec{n} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在 B. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\vec{n} \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在
 C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\vec{\alpha} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在 D. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\vec{\alpha} \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在

(4) 设 R 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径， r 是实数，则 ()

- A. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时， $|r| \geq R$ B. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时， $|r| \leq R$
 C. 当 $|r| \geq R$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散 D. 当 $|r| \leq R$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛

(5) 若矩阵 A 经初等列变换化成 B , 则 ()

- A. 存在矩阵 P , 使得 $PA = B$ B. 存在矩阵 P , 使得 $BP = A$
C. 存在矩阵 P , 使得 $PB = A$ D. 方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解

(6) 已知直线 $l_1: \frac{x-a_1}{a_1} = \frac{y-b_1}{b_1} = \frac{z-c_1}{c_1}$ 与直线 $l_2: \frac{x-a_2}{a_2} = \frac{y-b_2}{b_2} = \frac{z-c_2}{c_2}$ 相交于

一点, 记向量 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}$, $i=1,2,3$, 则 ()

- A. α_1 可由 α_2, α_3 线性表示 B. α_2 可由 α_1, α_3 线性表示
C. α_3 可由 α_1, α_2 线性表示 D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

(7) 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{12}$

(8) 设 X_1, X_2, \dots, X_{100} 为来自总体 X 的简单随机样本, 其中

$P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{2}$, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理

可得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right\}$ 的近似值为 ()

- A. $1 - \Phi(1)$ B. $\Phi(1)$ C. $1 - \Phi(0.2)$ D. $\Phi(0.2)$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在横线上.

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0 (a > 0)$, 且 $f(0) = m, f'(0) = n$, 则

$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设函数 $f(x,y) = \int_0^{xy} e^{xt^2} dt$, 则 $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设 X 服从区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 的均匀分布, $Y = \sin X$, 则 $Cov(X, Y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 15~23小题, 共94分. 解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

(15) (本题满分10分)

求函数 $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.

(16) (本题满分10分)

计算曲线积分 $I = \int \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy$, 其中 I 是 $x^2 + y^2 = 2$, 方向为逆时针方向.

(17) (本题满分10分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, (n+1)a_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)a_n$, 证明: 当 $|x| < 1$ 时, 幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求其和函数.

(18) (本题满分10分)

设 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$) 的下侧, $f(x)$ 是连续函数, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y]dydz + [yf(xy) + 2y + x]dzdx + [zf(xy) + z]dxdy.$$

(19) (本题满分10分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0$,

$M = \max_{[0, 2]} |f(x)|$, 证明

(I) $\exists \xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$;

(II) 若对任意的 $x \in (0, 2)$, $|f'(x)| \leq M$, 则 $M = 0$.

(20) (本题满分11分)

设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型

$g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a \geq b$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求正交矩阵 Q .

(21) (本题满分11分)

设 A 为2阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

(I) 证明 P 为可逆矩阵;

(II) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

(22) (本题满分11分)

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为 $P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}$, $Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2$.

(I) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示;

(II) 证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

(23) (本题满分11分)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

(I) 求概率 $P\{T > t\}$ 与 $P\{T > s+t | T > s\}$, 其中 $s > 0, t > 0$;

(II) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为 t_1, t_2, \dots, t_n ,

若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.