2019年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试卷

一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

（1）当$x\to 0$时，若$x-\tan x$与x^k是同阶无穷小，则$k=$（）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（2）设函数$f(x)=\begin{cases} x|x|, x\le 0 \\ x\ln x, x>0 \end{cases}$，则$x=0$是$f(x)$的（）

（A）可导点，极值点　　（B）不可导点，极值点

（C）可导点，非极值点　　（D）不可导点，非极值点

（3）设$\{u_n\}$是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是（）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{u_n}$

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_{n+1}^2-u_n^2\right)$

（4）设函数$Q(x,y)=\frac{x}{y^2}$．如果对上半平面$(y>0)$内的任意有向光滑封闭曲线C都有$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，那么函数$P(x,y)$可取为（）

（A）$y-\frac{x^2}{y^3}$　　（B）$\frac{1}{y}-\frac{x^2}{y^3}$

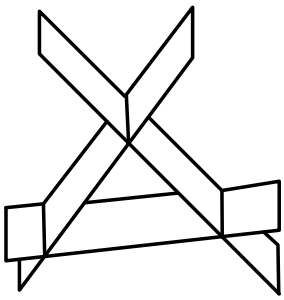
（C）$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$　　（D）$x-\frac{1}{y}$

（5）设A是3阶实对称矩阵，E是3阶单位矩阵，若$A^2+A=2E$,且$|A|=4$，则二次型x^TAx的规范为（）

（A）$y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　（B）$y_1^2+y_2^2-y_3^2$

（C）$y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　（D）$-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

（6）如图所示，有3张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i\left(i=1,2,3\right)$ 组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $A,\overline{A}$,则（）



（A） $r(A)=2,r(\overline{A})=3$　　（B） $r(A)=2,r(\overline{A})=2$

（C） $r(A)=1,r(\overline{A})=2$　　（D） $r(A)=1,r(\overline{A})=1$

（7）设 A,B 为随机事件，则 $P\left(A\right)=P\left(B\right)$ 的充分必要条件是（）

（A） $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　（B） $P(AB)=P(A)P(B)$

（C） $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$　　（D） $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

（8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从于正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P\left\{\left|X-Y\right|<1\right\}$（）

（A）与 μ 无关，而与 σ^2 有关　　（B）与 μ 有关，而与 σ^2 无关

（C）与 μ，σ^2 都有关　　（D）与 μ，σ^2 都无关

二、填空题：9~14小题，每小题4分，共24分。

（9）设函数 $f\left(u\right)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$,则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ _____.

（10）微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y\left(0\right)=1$ 的特解 $y=$ _____.

（11）幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $s(x)=$ _____.

（12）设$\sum$为曲面$x^2+y^2+4z^2=4(z\geq 0)$的上侧，则$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}dxdy=$

_____.

（13）设$A=(a_1,a_2,a_3)$为3阶矩阵，若a_1,a_2线性无关，且$a_3=-a_1+2a_2$，则线性方程组$Ax=0$的通解为_____.

（14）设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，$F(x)$为$X$的分布函数，$EX$为$X$数学期望，则$P\{F(X)>EX-1\}=$_____.

三、解答题：15~23小题，共94分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分10分）

设函数$y(x)$是微分方程$y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$满足条件$y(0)=0$的特解.

（1）求$y(x)$；

（2）求曲线$y=y(x)$的凹凸区间及拐点.

（16）（本题满分10分）

设a,b为实数，函数$z=2+ax^2+by^2$在点$(3,4)$处的方向导数中，沿方向$l=-3i-4j$的方向导数最大，最大值为10.

（1）求a,b；

（2）求曲面$z=2+ax^2+by^2(z\geq 0)$ 的面积.

（17）（本题满分10分）

求曲线$y=e^{-x}\sin x(x\geq 0)$与x轴之间图形的面积.

（18）（本题满分10分）

设$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx(n=0,1,2,\cdots)$

（1）证明：数列$\{a_n\}$单调减少，且$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

（19）（本题满分10分）

设Ω是由锥面在$x^2+(y-z)^2-(1-z)^2(0\leq z\leq 1)$与平面$z=0$围成的锥体，求$\Omega$的形心坐标.

（20）（本题满分11分）

设向量组$x_1=(1,2,1)^T x_2=(1,3,2)^T x_3=(1,a,3)^T$为$R^3$的一个基，$\beta=(1,1,1)^T$在基下的坐标$(b,c,1)^T$.

（1）求a,b,c；

（2）证明a_2,a_3,β为R^3的一个基．并求a_2,a_3,β到a_1,a_2,a_3的过渡矩阵.

（21）（本题满分11分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

（1）求 x、y；

（2）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

（22）（本题满分11分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为1的指数分布．Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p$, $P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$, 令 $Z=XY$

（1）求 Z 的概率密度；

（2）p 为何值时，X 与 Y 不相关；

（3）X 与 Z 是否相互独立.

（23）（本题满分11分）

设总体 X 的概率密度为 $f\left(x;\sigma^2\right)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & ,x\geq\mu.\\ 0, & x<\mu.\end{cases}$

其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 A；

（2）求 σ^2 的最大似然估计量.