2018年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试卷

一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

（1）下列函数中，在$x=0$处不可导的是（　　）

（A）$f(x)=|x|\sin|x|$　　（B）$f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

（C）$f(x)=\cos|x|$　　（D）$f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

（2）过点$(1,0,0),(0,1,0)$，且与曲面$z=x^2+y^2$相切的平面为（　　）

（A）$z=0$与$x+y-z=1$　　（B）$z=0$与$2x+2y-z=2$

（C）$x=y$与$x+y-z=1$　　（D）$x=y$与$2x+2y-z=2$

（3）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$（　　）

（A）$\sin1+\cos1$　　（B）$\sin1+\cos1$

（C）$2\sin1+2\cos1$　　（D）$2\sin1+3\cos1$

（4）设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{e^x}dx$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$，则（　　）

（A）$M>N>K$　　（B）$M>K>N$

（C）$K>M>N$　　（D）$K>N>M$

（5）下列矩阵中与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

（6）设A、B为n阶矩阵，记$r\left(X\right)$为矩阵X的秩，$\left(X,Y\right)$表示分块矩阵，则（　　）

（A）$r(A,AB)=r(A)$　　　　（B）$r(A,BA)=r(A)$

（C）$r(A,B)=\max\left\{r(A),r(B)\right\}$　　　　（D）$r(A,B)=r\left(A^TB^T\right)$

（7）设随机变量X的概率密度$f\left(x\right)$满足$f(1+x)=f(1-x)$，且$\int_0^2 f(x)dx=0.6$，则$P\{X<0\}=$（　　）

（A）0.2　　（B）0.3　　（C）0.4　　（D）0.5

（8）设总体X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right),X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X$的简单随机样本，据此样本检测：假设：$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$，则（　　）

（A）如果在检验水平$\alpha=0.05$下拒绝H_0，那么在检验水平$\alpha=0.01$下必拒绝H_0

（B）如果在检验水平$\alpha=0.05$下拒绝H_0，那么在检验水平$\alpha=0.01$必接受H_0

（C）如果在检验水平$\alpha=0.05$下接受H_0，那么在检验水平$\alpha=0.01$下必拒绝H_0

（D）如果在检验水平$\alpha=0.05$下接受H_0，那么在检验水平$\alpha=0.01$下必接受H_0

二、填空题：9~14小题，每小题4分，共24分。

（9）若$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$，则$k=$________.

（10）设函数$f\left(x\right)$具有2阶连续导数，若曲线$y=f\left(x\right)$过点$\left(0,0\right)$且与曲线$y=2^x$在点$\left(1,2\right)$处相切，则$\int_0^1 xf''(x)dx=$________.

（11）设$F(x,y,z)=xy\vec{i}-yz\vec{j}+zx\vec{k}$，则$rotF(1,1,0)=$________.

（12）设L 为球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$x+y+z=0$的交线，则$\oint_L xyds=$

________.

（13）设2阶矩阵A有两个不同特征值，α_1,α_2是A的线性无关的特征向量，且满足$A^2(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$，则$|A|=$________.

（14）设随机事件A与B相互独立，A与C相互独立，$BC=\varnothing$，若

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}，\ P=(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4}，$$

则$P(C)=$________.

三、解答题：15~23小题，共94分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分10分）

求不定积分$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$.

（16）（本题满分10分）

将长为$2m$的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形．三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值．

（17）（本题满分10分）

设$\sum$是曲面$x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$的前侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} xdydz+\left(y^3+2\right)dzdx+z^3dxdy .$$

（18）（本题满分10分）

已知微分方程 $y' + y = f(x)$,其中 $f(x)$ 是 R 上的连续函数.

（I）若 $f(x) = x$,求方程的通解；

（II）若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，证明：方程存在唯一的以 T 为周期的解.

（19）（本题满分10分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1 > 0$ ，$x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1,2,\cdots)$ ，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

（20）（本题满分11分）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1, -x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + a x_3)^2$,其中 a 是参数.

（I）求 $f(x_1,x_2,x_3) = 0$ 的解；

（II）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

（21）（本题满分11分）

已知a是常数，且矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵

$B=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

（I）求a；

（II）求满足$AP=B$的可逆矩阵P.

（22）（本题满分11分）

设随机变量X与Y相互独立，X的概率分布为

$P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$，$Y$服从参数为$\lambda$的泊松分布．令$Z=XY$.

（I）求$Cov(X,Z)$；

（II）求Z的概率分布．

（23）（本题满分11分）

设总体X的概率密度为

$$f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

其中$\sigma\in(0,+\infty)$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本

记σ的最大似然估计量为$\hat{\sigma}$.

（I）求$\hat{\sigma}$；

（II）求$E\hat{\sigma}$和$D\left(\hat{\sigma}\right)$.