

2017年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试卷

一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

(1) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 ()

- (A) $ab = \frac{1}{2}$ (B) $ab = -\frac{1}{2}$ (C) $ab = 0$ (D) $ab = 2$

(2) 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x) > 0$ 则 ()

- (A) $f(1) > f(-1)$ (B) $f(1) < f(-1)$
 (C) $|f(1)| > |f(-1)|$ (D) $|f(1)| < |f(-1)|$

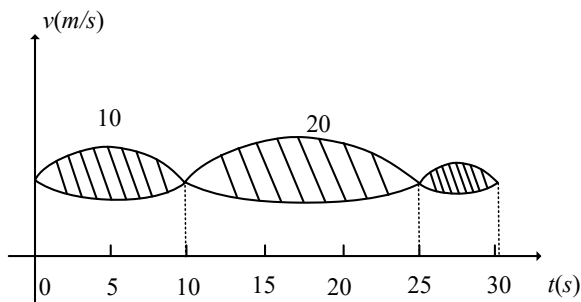
(3) 函数 $f(x, y, z) = x^2y + z^2$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处沿向量 $n(1, 2, 2)$ 的方向导数为 ()

- (A) 12 (B) 6 (C) 4 (D) 2

(4) 甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方10（单位：m）处，如下图中，实线表示甲的速度曲线 $v = v_1(t)$ （单位：m/s）虚线表示乙的速度曲线

$v = v_2(t)$ ，三块阴影部分面积的数值依次为10，20，3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 （单位：s），则 ()

- (A) $t_0 = 10$ (B) $15 < t_0 < 20$ (C) $t_0 = 25$ (D) $t_0 > 25$



(5) 设 α 为 n 维单位列向量， E 为 n 阶单位矩阵，则 ()

- (A) $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆 (B) $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆
 (C) $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆 (D) $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

(6) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则 ()

- (A) A与C相似, B与C相似 (B) A与C相似, B与C不相似
 (C) A与C不相似, B与C相似 (D) A与C不相似, B与C不相似

(7) 设 A, B 为随机事件, 若 $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, 则 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是 ()

- A. $P(B|A) > P(B|\bar{A})$ B. $P(B|A) < P(B|\bar{A})$
 C. $P(\bar{B}|A) > P(\bar{B}|\bar{A})$ D. $P(\bar{B}|A) < P(\bar{B}|\bar{A})$

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 则下列结论中不正确的是: ()

- (A) $\sum (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布 (B) $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布
 (C) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布 (D) $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

二、填空题: 9~14小题, 每小题4分, 共24分。

(9) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 则 $f^{(3)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

(10) 微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

(11) 若曲线积分 $\int_L \frac{xdx - dydy}{x^2 + y^2 - 1}$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径无关,

则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

(12) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(13) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的3维列向量组, 则向量组

$A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为

(14) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 EX 为多少

三、解答题: 15~23小题, 共94分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分10分)

设函数 $f(u, v)$ 具有2阶连续偏导数, $y = f(e^x, \cos x)$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$, $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0}$

(16) (本题满分10分)

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

(17) (本题满分10分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 得极值

(18) (本题满分10分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有2阶导数, $f(1) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$

证 (1) 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 至少存在一个根;

(2) 方程 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在两个不同的实根。

(19) (本题满分10分)

设薄片型物体 S 是圆锥面 $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $Z^2 = 2x$ 割下的有限部分, 其上任意一点弧长为 $u(x, y, z) = 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。记圆锥与柱面的交线为 C

(1) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程

(2) 求 S 的质量 M

(20) (本题满分11分)

设三阶行列式 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有3个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$

(1) 证明 $r(A) = 2$

(2) 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解

(21) (本题满分11分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$, 在正交变换 $x = Qy$

下的标准型为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ 求 a 的值及一个正交矩阵 Q 。

(22) (本题满分11分)

设随机变量 X, Y 互独立, 且 X 的概率分布为 $P\{X = 0\} = P\{X = 2\} = \frac{1}{2}$, Y 概率

密度为 $f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(1) 求 $P\{Y \leq EY\}$ (2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度

(23) (本题满分11分)

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 x_1, x_2, \dots, x_n 相互独立，且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $z_i = |x_i - \mu|$ ，

($i = 1, 2, \dots, n$)，利用 z_1, z_2, \dots, z_n 估计 σ

(I) 求 Z_1 的概率密度

(II) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量

(III) 求 σ 的最大似然估计量