2016年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试卷

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛，则（　　）

A．$a<1$ 且 $b>1$　　B．$a>1$ 且 $b>1$

C．$a<1$ 且 $a+b>1$　　D．$a>1$ 且 $a+b>1$

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1),x<1\\ \ln x,x\geq 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（　　）

A．$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x-1),x\geq 1\end{cases}$　　B．$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x+1)-1,x\geq 1\end{cases}$

C．$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x+1)+1,x\geq 1\end{cases}$　　D．$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x-1)+1,x\geq 1\end{cases}$

（3）若 $y=\left(1+x^2\right)^2-\sqrt{1+x^2},y=\left(1+x^2\right)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程

$y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q\left(x\right)=$（　　）

A．$3x\left(1+x^2\right)$　　B．$-3x\left(1+x^2\right)$

C．$\frac{x}{1+x^2}$　　D．$-\frac{x}{1+x^2}$

（4）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x,x\leq 0\\ \frac{1}{n},\frac{1}{n+1}<x\leq\frac{1}{n},n=1,2,\ldots\end{cases}$，则（　　）

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C）$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导

（D）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

（5）设 A,B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是（　　）

（A）A^T 与 B^T 相似　　（B）A^{-1} 与 B^{-1} 相似

（C）$A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似　　　　　（D）$A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

（6）设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为（　　）

（A）单叶双曲面　　　　　（B）双叶双曲

（C）椭球面　　　　　（D）柱面

（7）设随机变量 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)(\sigma>0)$，记 $p=P\left\{X\le\mu+\sigma^2\right\}$，则（　　）

（A）p 随着 μ 的增加而增加　　　　　（B）p 随着 σ 的增加而增加

（C）p 随着 μ 的增加而减少　　　　　（D）p 随着 σ 的增加而减少

（8）随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3，且三种结果发生的概率均为 $\dfrac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做2次，X 表示2次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示2次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为（　　）

（A）$-\dfrac{1}{2}$　　　（B）$-\dfrac{1}{3}$　　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　　（D）$\dfrac{1}{3}$

二、填空题：9~14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=$________.

（10）向量场 $A(x,y,z)=(x+y+z)i+xyj+zk$ 的旋度 $rotA=$________.

（11）设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz\big|_{(0,1)}=$________.

（12）设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$________.

（13）行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$________.

（14）设 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，样本均值 $\overline{x}=9.5$，

参数μ的置信度为0.95的双侧置信区间的置信上限为10.8，则μ的置信度为0.95的双侧置信区间为________.

三、解答题：15—23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分10分）已知平面区域

$D=\left\{(r,\theta)|2\le r\le 2(1+\cos\theta),-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分$\iint\limits_D xdxdy$.

（16）（本题满分10分）设函数$y(x)$满足方程$y''+2y''+ky=0$其中$0<k<1$.

（I）证明：反常积分$\int_0^{+\infty}y(x)dx$收敛；

（II）若$y(0)=1$，$y'(0)=1$，求$\int_0^{+\infty}y(x)dx$的值.

（17）（本题满分10分）设函数$f(x,y)$满足$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且$f(0,y)=y+1$，$L_t$是从点$(0,0)$到点$(1,t)$的光滑曲线，计算曲线积分

$I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$，并求$I(t)$的最小值

（18）设有界区域Ω由平面$2x+y+2z=2$与三个坐标平面围成，$\sum$为Ω整个表面的外侧，计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+1\right)dydz-2ydzdx+3zdxdy$

（19）（本题满分10分）已知函数$f\left(x\right)$可导，且$f(0)=1$，$0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列$\left\{x_n\right\}$满足$x_{n+1}=f\left(x_n\right)(n=1,2\ldots)$，证明：

（I）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)$绝对收敛；

（II）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，且$0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

（20）（本题满分11分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{pmatrix}$当$a$为何值时，方程$AX=B$无解、有唯一解、有无穷多解？

（21）（本题满分11分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

（I）求A^{99}

（II）设3阶矩阵$B=\left(\alpha,\alpha_2,\alpha_3\right)$满足$B^2=BA$，记$B^{100}=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)$将$\beta_1,\beta_2,\beta_3$分别表示为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合。

（22）（本题满分11分）设二维随机变量(X,Y)在区域

$D=\left\{(x,y)\middle|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$上服从均匀分布，令$U=\begin{cases}1,X\le Y\\0,X>Y\end{cases}$

（I）写出(X,Y)的概率密度；

（II）问U与X是否相互独立？并说明理由；

（III）求$Z=U+X$的分布函数$F(z)$.

（23）设总体X的概率密度为$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta\\0,\text{ 其他}\end{cases}$，其中$\theta\in(0,+\infty)$为未知参数，$X_1,X_2,X_3$为来自总体$X$的简单随机样本，令$T=\max(X_1,X_2,X_3)$。

（1）求T的概率密度

（2）确定a，使得aT为θ的无偏估计