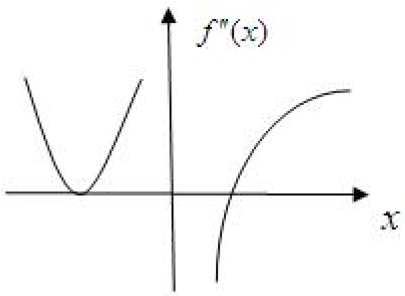
2015年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点的个数为：

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3



(2) 设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，则：

(A) $a=-3,b=2,c=-1$

(B) $a=3,b=2,c=-1$

(C) $a=-3,b=2,c=1$

(D) $a=3,b=2,c=1$

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的：

(A) 收敛点，收敛点

(B) 收敛点，发散点
(C) 发散点，收敛点
(D) 发散点，发散点

(4) 设D是第一象限由曲线$2xy=1$，$4xy=1$与直线$y=x$，$y=\sqrt{3}x$围成的平面区域，函数$f(x,y)$在D上连续，则$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(5) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，若集合$\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组$Ax=b$有无穷多解的充分必要条件为:

(A) $a\notin\Omega,d\notin\Omega$
(B) $a\notin\Omega,d\in\Omega$
(C) $a\in\Omega,d\notin\Omega$
(D) $a\in\Omega,d\in\Omega$

(6) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$，则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下的标准形为:

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$

(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$

(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件，则：

(A) $P(AB)\le P(A)P(B)$

(B) $P(AB)\ge P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

(D) $P(AB)\ge \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

(8) 设随机变量 X,Y 不相关，且 $E(X)=2,E(Y)=1,D(X)=3$，则 $E\left[X(X+Y-2)\right]=$

(A) -3
(B) 3
(C) -5
(D) 5

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$__________.

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|)\mathrm{d}x=$__________.

(11) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$__________.

(12) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则

$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=$__________.

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix}2&0&0&\cdots&0&2\\-1&2&0&\cdots&0&2\\0&-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&2\\0&0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=$__________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则

$P\{XY-Y<0\}=$__________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）**（本题满分 10 分）**

设函数 $f\left(x\right)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$， $g(x)=kx^3$，若 $f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

（16）**（本题满分 10 分）**

设函数 $f\left(x\right)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，由线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f\left(0\right)=2$，求 $f\left(x\right)$ 的表达式.

（17）**（本题满分 10 分）**

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

（18）**（本题满分 10 分）**

（I） 设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

（II） 设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导， $f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

（19）**（本题满分 10 分）**

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$ 起点为 $A\left(0,\sqrt{2},0\right)$，终点为 $B\left(0,-\sqrt{2},0\right)$，计算曲线积分 $I=\int_L\left(y+z\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2+y\right)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$.

(20)（本题满 11 分）

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 内 R^3 的一个基， $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$， $\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\left(k+1\right)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(I)证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 R^3 的一个基；

(II)当 k 为何值时，存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同，并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

(21) **(本题满分 11 分)**

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

(I) 求 a,b 的值；

(II) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

(22) **(本题满分 11 分)**

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, x>0,\\ 0, \qquad x\le 0.\end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测, 直到 2 个大于 3 的观测值出现的停止. 记 Y 为观测次数.

(I) 求 Y 的概率分布；

(II) 求 $E(Y)$

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, \theta\le x\le 1,\\ 0, \text{其他}.\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量.

(II) 求 θ 的最大似然估计量.