

## 2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列曲线有渐近线的是:

(A)  $y = x + \sin x$

(B)  $y = x^2 + \sin x$

(C)  $y = x + \sin \frac{1}{x}$

(D)  $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

(2) 设函数  $f(x)$  具有二阶导数,  $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$ , 则在区间  $[0,1]$  上:

(A) 当  $f'(x) \geq 0$  时,  $f(x) \geq g(x)$

(B) 当  $f'(x) \geq 0$  时,  $f(x) \leq g(x)$

(C) 当  $f''(x) \geq 0$  时,  $f(x) \geq g(x)$

(D) 当  $f''(x) \geq 0$  时,  $f(x) \leq g(x)$

(3) 设  $f(x)$  是连续函数, 则  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y) dx =$

(A)  $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$

(B)  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y) dy$

(C)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos\theta, r \sin\theta) dr$

(D)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr$

(4) 若  $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a,b \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$ , 则

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x =$$

- (A)  $2 \sin x$   
 (B)  $2 \cos x$   
 (C)  $2\pi \sin x$   
 (D)  $2\pi \cos x$

$$(5) \text{ 行列式 } \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$$

- (A)  $(ad - bc)^2$   
 (B)  $-(ad - bc)^2$   
 (C)  $a^2 d^2 - b^2 c^2$   
 (D)  $b^2 c^2 - a^2 d^2$

(6) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是三维向量，则对任意常数  $k, l$ ，向量组  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$  线性无关是向

量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关的：

- (A) 必要非充分条件  
 (B) 充分非必要条件  
 (C) 充分必要条件  
 (D) 既非充分又非必要条件

(7) 设随机事件  $A$  与  $B$  相互独立，且  $P(B) = 0.5$ ， $P(A - B) = 0.3$ ，则  $P(B - A) =$

- (A) 0.1  
 (B) 0.2  
 (C) 0.3  
 (D) 0.4

(8) 设连续型随机变量  $X_1$  与  $X_2$  相互独立，且方差均存在， $X_1$  与  $X_2$  的概率密度分别为

$f_1(x)$  与  $f_2(x)$ ，随机变量  $Y_1$  的概率密度为  $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)]$ ，随机变量

$Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ ，则：

(A)  $EY_1 > EY_2, DY_1 > DY_2$

(B)  $EY_1 = EY_2, DY_1 = DY_2$

(C)  $EY_1 = EY_2, DY_1 < DY_2$

(D)  $EY_1 = EY_2, DY_1 > DY_2$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 曲面  $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x)$  在点  $(1, 0, 1)$  处的切平面方程为\_\_\_\_\_。

(10) 设  $f(x)$  是周期为 4 的可导奇函数，且  $f'(x) = 2(x-1), x \in [0, 2]$ ，则

$$f(7) = \text{_____}.$$

(11) 微分方程  $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$  满足条件  $y(1) = e^3$  的解为  $y = \text{_____}$ 。

(12) 设  $L$  是柱面  $x^2 + y^2 = 1$  与平面  $y + z = 0$  的交线，从  $z$  轴正向往  $z$  轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分  $\oint_L zdx + ydz = \text{_____}$ 。

(13) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$  的负惯性指数是 1，则  $a$  的取值范围\_\_\_\_\_。

(14) 设总体  $X$  的概率密度为  $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  其中  $\theta$  是未知参数，

$X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单样本，若  $E(c \sum_{i=1}^n X_i^2) = \theta^2$ ，则  $c = \text{_____}$ 。

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[ t^2 \left( e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}.$$

(16) (本题满分 10 分)

设函数  $y = f(x)$  由方程  $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$  确定，求  $f(x)$  的极值.

(17) (本题满分 10 分)

设函数  $f(u)$  具有二阶连续导数， $z = f(e^x \cos y)$  满足  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(z + e^x \cos y)e^{2x}$ . 若

$f(0) = 0, f'(0) = 0$ ，求  $f(u)$  的表达式.

(18) (本题满分 10 分)

设  $\Sigma$  为曲面  $z = x^2 + y^2$  ( $z \leq 1$ ) 的上侧，计算曲面积分

$$I = y \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy$$

(19) (本题满分 10 分)

设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  满足  $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < b_n < \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos a_n - a_n = \cos b_n$ , 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛.

(I) 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

(II) 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$  收敛.

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $E$  为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系;

(II) 求满足  $AB = E$  的所有矩阵  $B$ .

(21) (本题满分 11 分)

证明  $n$  阶矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$  相似.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  的概率分布为  $P\{X = 1\} = P\{X = 2\} = \frac{1}{2}$ , 在给定  $X = i$  的条件下, 随机变量

失败不属于我，我现在一无所有，我只有拥有毅力去拼搏的能力

$Y$  服从均匀分布  $U(0, i) (i = 1, 2)$ .

(I) 求  $Y$  的分布函数  $F_Y(y)$ ;

(II) 求  $E(Y)$ .

(23) (本题满分 11 分)

设总体  $X$  的分布函数为  $F(x; \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$  其中  $\theta$  是未知参数且大于

零.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本.

(I) 求  $E(X)$  与  $E(X^2)$ ;

(II) 求  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta}_n$ ;

(III) 是否存在实数  $a$ , 使得对任何  $\varepsilon > 0$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geq \varepsilon\} = 0$ ?