2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$

(A) 1.

(B) e.

(C) e^{a-b}.

(D) e^{b-a}.

(2) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，则

$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

(A) x.

(B) z.

(C) $-x$.

(D) $-z$.

(3) 设 m,n 均是正整数，则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性：

(A) 仅与 m 的取值有关.

(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 取值都有关.

(D) 与 m,n 取值都无关.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

(A) $\int_0^1 dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.

(B) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.

(D) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵， $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵， $\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ ，则：

(A) 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$ ，秩 $r(\boldsymbol{B})=m$.

(B) 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$ ，秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

(C) 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$ ，秩 $r(\boldsymbol{B})=m$.

(D) 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$ ，秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ ，若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3 ，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于：

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1 \\ 1-e^{-x}, & x\ge 1 \end{cases}$，则 $P\{X=1\}=$

(A) 0.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{1}{2}-e^{-1}$.

(D) $1-e^{-1}$.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若

$f(x)=\begin{cases} af_1(x), x\le 0, \\ bf_2(x), x>0, \end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 为概率密度，则 a,b 应满足：

(A) $2a+3b=4$.

(B) $3a+2b=4$.

(C) $a+b=1$.

(D) $a+b=2$.

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $\begin{cases} x=e^{-t}, \\ y=\int_0^t \ln\left(1+u^2\right)du, \end{cases}$ 求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$_____.

(10) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=$_____.

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|$ $\left(x\in[-1,1]\right)$，起点是 (-1.0)，终点是 $(1,0)$，则曲线积分 $\int_L xydx+x^2dy=$_____.

(12) 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le z\le 1\right\}$，则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$_____.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^T$，若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2，则 $a=$_____.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{C}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，则 $E\left(X^2\right)=$_____.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^{x}$ 的通解.

(16)（本题满分 10 分）

求函数 $f\left(x\right)=\int_{1}^{x^{2}}\left(x^{2}-t\right)e^{-t^{2}}dt$ 的单调区间与极值.

(17)（本题满分 10 分）

(I) 比较 $\int_{0}^{1}\left|\ln t\right|\left[\ln\left(1+t\right)\right]^{n}dt$ 与 $\int_{0}^{1}t^{n}\left|\ln t\right|dt\ \left(n=1,2,\cdots\right)$ 的大小，说明理由；

(II) 记 $u_{n}=\int_{0}^{1}\left|\ln t\right|\left[\ln\left(1+t\right)\right]^{n}dt\ \left(n=1,2,\cdots\right)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n}$.

(18)（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S:x^{2}+y^{2}+z^{2}-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\left(x+\sqrt{3}\right)\left|y-2z\right|}{\sqrt{4+y^{2}+z^{2}-4yz}}dS$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在 2 个不同的解.

(I) 求 λ，a；

(II) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{Ax}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列

为$(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

（I）求矩阵$\boldsymbol{A}$；

（II）证明$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$为正定矩阵，其中$\boldsymbol{E}$为3阶单位矩阵.

(22)（本题满分 11 分）

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2}$，$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$，

求常数A及条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$.

(23)（本题满分 11 分）

设总体X的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数$\theta\in(0,1)$未知，以N_i表示来自总体X的简单随机样本(样本容量为n)中等于i的个数($i=1,2,3$). 试求常数a_1,a_2,a_3，使$T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$为θ的无偏估计量，并求T的方差.